

Đề thi toán Tú Tài II ban B thời VNCH năm 1971 (thời hạn 3 giờ, hệ số 5)

Câu hỏi (mỗi câu 2 điểm)

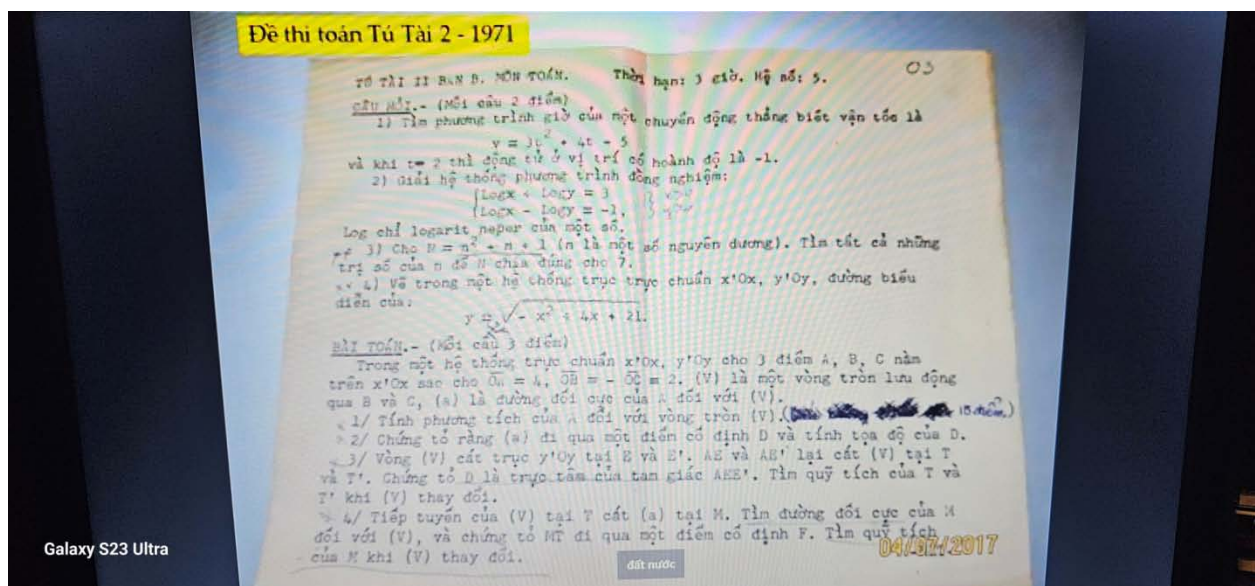
1. Tìm phương trình giờ của một chuyển động thẳng biết vận tốc là $v = 3t^2 + 4t - 5$ và khi $t = 2$ thì động từ ở vị trí có hoành độ là -1 .
2. Giải hệ thống phương trình đồng nghiệm:
$$\begin{cases} \text{Log } x + \text{Log } y = 3 \\ \text{Log } x - \text{Log } y = -1 \end{cases}$$

Log chỉ logarit neper của một số
3. Cho $N = n^2 + n + 1$ (n là một số nguyên dương). Tìm tất cả những trị số của n để N chia đúng cho 7.
4. Vẽ trong hệ thống trục trục chuẩn $x'Ox, y'Oy$, đường biểu diễn của: $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21}$

Bài toán (mỗi câu 3 điểm)

Trong một hệ thống trục trục chuẩn $x'Ox, y'Oy$ cho 3 điểm A, B, C nằm trên $x'Ox$ sao cho $\overline{OA} = 4, \overline{OB} = -\overline{OC} = 2$. (V) là một vòng tròn lưu động qua B và C, (a) là đường đối cực của A đối với (V).

1. Tính phương tích của A đối với vòng tròn (V).
2. Chứng tỏ rằng (a) đi qua một điểm cố định D và tính tọa độ của D.
3. Vòng (V) cắt trục $y'Oy$ tại E và E'. AE và AE' lại cắt (V) tại T và T'. Chứng tỏ D là trực tâm của tam giác AEE'. Tìm quỹ tích của T và T' khi (V) thay đổi.
4. Tiếp tuyến của (V) tại T cắt (a) tại M. Tìm đường đối cực của M đối với (V), và chứng tỏ MT đi qua một điểm cố định F. Tìm quỹ tích của M khi (V) thay đổi.



Bài giải (Vũ X. Hoài, cựu học sinh trường trung học Chu Văn An Sài Gòn)

Câu hỏi (mỗi câu 2 điểm). **(Tổng cộng thời gian cho 4 câu hỏi $\approx$ 11 phút)**

1. Tìm phương trình giờ của một chuyển động thẳng biết vận tốc là $v = 3t^2 + 4t - 5$ và khi $t = 2$ thì động tử ở vị trí có hoành độ là -1 . **(Thời gian $\approx$ 2 phút)**

Gọi $x(t)$ là hoành độ của động tử ở thời điểm t .

$$v(t) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{-1}^{x(t)} ds = \int_2^t v(u) du \Rightarrow x(t) = -1 + \int_2^t (3u^2 + 4u - 5) du = t^3 + 2t^2 - 5t - 7$$

2. Giải hệ thống phương trình đồng nghiệm:
$$\begin{cases} \text{Log } x + \text{Log } y = 3 \\ \text{Log } x - \text{Log } y = -1 \end{cases}$$

Log chỉ logarit neper của một số. **(Thời gian $\approx$ 1 phút, tính nhẩm trong đầu được)**

Cộng/trừ hai phương trình rồi chia đôi cả hai vế

$$\text{Log } x = 1, \text{Log } y = 2 \Rightarrow x = e, y = e^2$$

3. Cho $N = n^2 + n + 1$ (n là một số nguyên dương). Tìm tất cả những trị số của n để N chia đúng cho 7. **(Thời gian $\approx$ 5 phút)**

Định nghĩa: Nếu n chia cho y dư z , ta viết $n \equiv z \pmod{y}$

Định lý: $n \equiv z \pmod{y} \Rightarrow kn \equiv (kz) \pmod{y}; \quad n + r \equiv (z + r) \pmod{y}$

Định lý: Tất cả những số nguyên dương n đều có thể được biểu thị dưới dạng $n \equiv z \pmod{y}$, $z \equiv 0, 1, \dots, y-1$.

n chia đúng cho $y \Rightarrow n \equiv 0 \pmod{y}$. Khảo sát 7 trường hợp $n \equiv z \pmod{7}$, $z \equiv 0, 1, \dots, 6$.

- | | | |
|-----------------------------|--|---------------------------------|
| (a) $n \equiv 0 \pmod{7}$: | $N \equiv 0^2 + 0 + 1 \equiv 1 \pmod{7} \neq 0 \pmod{7}$ | $\Rightarrow$ Không phải đáp số |
| (b) $n \equiv 1 \pmod{7}$: | $N \equiv 1^2 + 1 + 1 \equiv 3 \pmod{7} \neq 0 \pmod{7}$ | $\Rightarrow$ Không phải đáp số |
| (c) $n \equiv 2 \pmod{7}$: | $N \equiv 2^2 + 2 + 1 \equiv 7 \equiv 0 \pmod{7}$ | $\Rightarrow$ Đáp số |
| (d) $n \equiv 3 \pmod{7}$: | $N \equiv 3^2 + 3 + 1 \equiv 13 \equiv 6 \pmod{7} \neq 0 \pmod{7}$ | $\Rightarrow$ Không phải đáp số |
| (e) $n \equiv 4 \pmod{7}$: | $N \equiv 4^2 + 4 + 1 \equiv 21 \equiv 0 \pmod{7}$ | $\Rightarrow$ Đáp số |
| (f) $n \equiv 5 \pmod{7}$: | $N \equiv 5^2 + 5 + 1 \equiv 31 \equiv 3 \pmod{7} \neq 0 \pmod{7}$ | $\Rightarrow$ Không phải đáp số |
| (g) $n \equiv 6 \pmod{7}$: | $N \equiv 6^2 + 6 + 1 \equiv 43 \equiv 1 \pmod{7} \neq 0 \pmod{7}$ | $\Rightarrow$ Không phải đáp số |

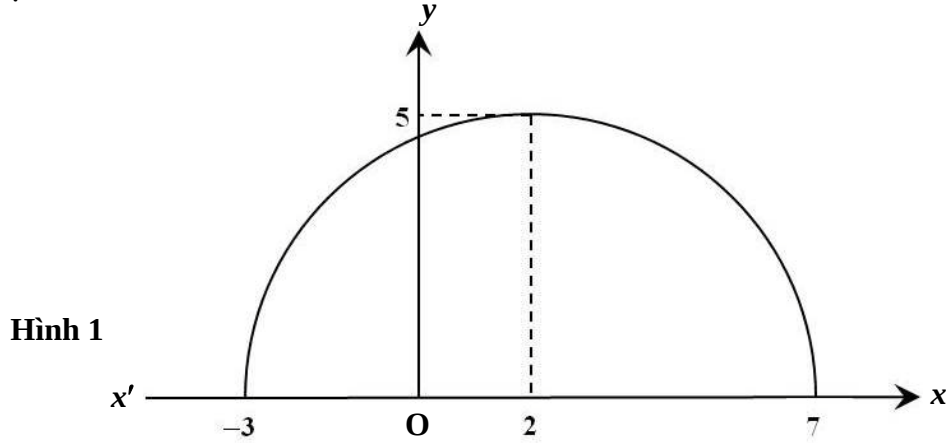
Kết luận: N chia đúng cho 7 nếu và chỉ nếu n chia cho 7 dư 2 hoặc dư 4.

4. Vẽ trong hệ thống trục trực chuẩn $x'Ox, y'Oy$, đường biểu diễn của: $y = \sqrt{-x^2 + 4x + 21}$. **(Thời gian $\approx$ 3 phút, kể cả thì giờ vẽ hình bằng tay)**

Bình phương cả hai vế của hàm số.

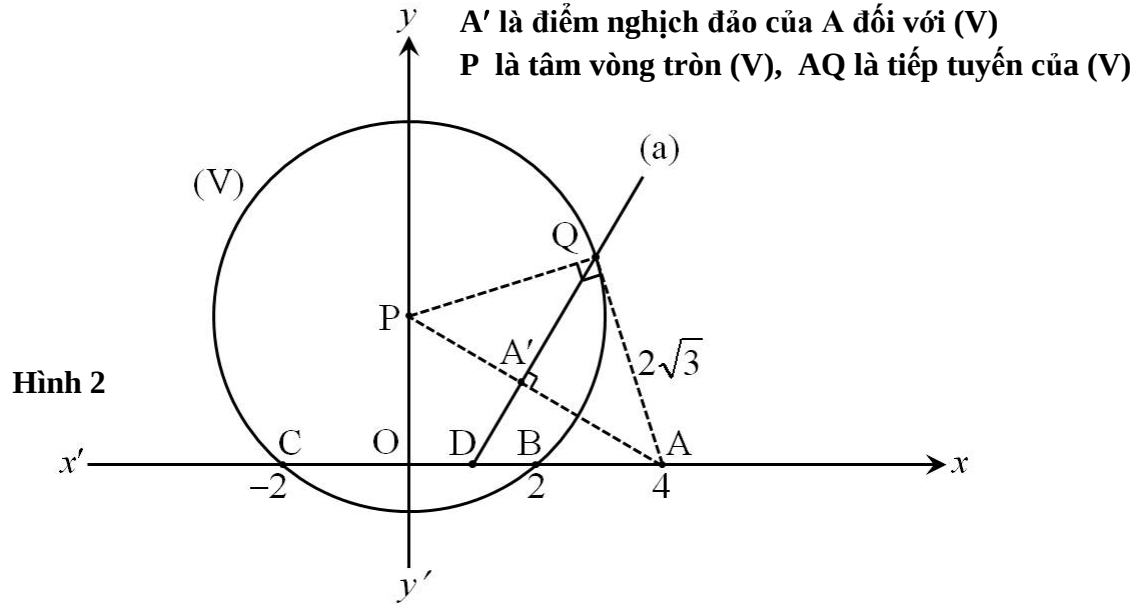
$$y^2 = -x^2 + 4x + 21 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 25 \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 5^2, \quad y \geq 0$$

Đây là phương trình của nửa vòng tròn tâm $(2, 0)$, bán kính 5, nằm trong nửa mặt phẳng bên trên trục $x'Ox$.



Bài toán (mỗi câu 3 điểm) **(Tổng cộng thời gian cho bài toán ≈ 53 phút)**

Trong một hệ thống trục tọa độ chuẩn $x'Ox, y'Oy$ cho 3 điểm A, B, C nằm trên $x'Ox$ sao cho $\overline{OA} = 4, \overline{OB} = -\overline{OC} = 2$. (V) là một vòng tròn lưu động qua B và C , (a) là đường đối cực của A đối với (V) . **(Vẽ hình bằng tay ≈ 5 phút)**



1. Tính phương tích của A đối với vòng tròn (V) . **(Thời gian < 1 phút)**

$$\Pi_V(A) = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = (\overline{OA} - \overline{OB})(\overline{OA} - \overline{OC}) = (4 - 2)(4 + 2) = 12, \quad \forall (V)$$

2. Chứng tỏ rằng (a) đi qua một điểm cố định D và tính tọa độ của D . **(Thời gian ≈ 10 phút)**

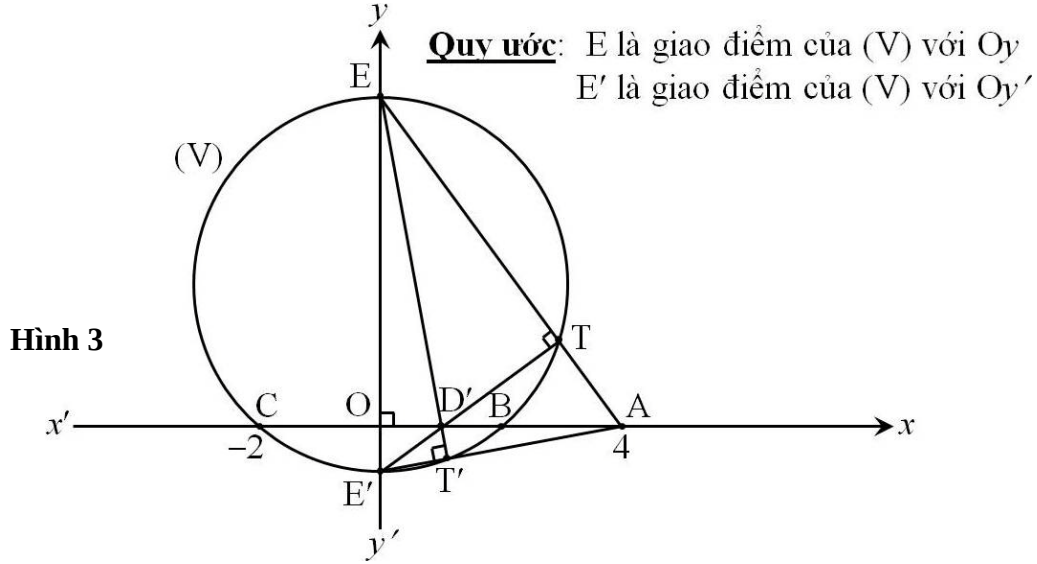
Định lý: Giao điểm D của đường đối cực (a) của A với một cát tuyến bất kỳ của (V) qua A , cắt (V) tại hai điểm B và C , tạo ra một hàng điểm điều hòa $CBDA = -1$.

Trong bài toán này thì A, B, C cố định; do đó D cũng phải cố định. Dùng công thức Newton

$$\overline{OB}^2 = \overline{OD} \cdot \overline{OA} \Rightarrow \overline{OD} = \overline{OB}^2 / \overline{OA} = 2^2 / 4 = 1$$

Kết luận: Đường đối cực (a) của A đi qua điểm cố định D trên trục $x'Ox$, và $\overline{OD} = 1, \forall (V)$.

3. Vòng (V) cắt trục $y'Oy$ tại E và E'. AE và AE' lại cắt (V) tại T và T'. Chứng tỏ D là trực tâm của tam giác AEE'. Tìm quỹ tích của T và T' khi (V) thay đổi. **(Thời gian ≈ 20 phút)**



Vẽ các đường E'T và ET'. Vì góc nội tiếp bằng nửa cung bị chắn nên $\angle ETE' = \angle ET'E = 90^\circ$. Do đó E'T và ET' là hai đường cao của $\triangle AEE'$. Đường cao còn lại của $\triangle AEE'$ là AO. Giao điểm D' của AO, E'T và ET' là trực tâm của $\triangle AEE'$. Điểm D' nằm trên đường cao AO; do đó D' cũng phải nằm trên trục $x'Ox$. Gọi phương tích của D' đối với (V) là $\Pi_V(D')$, ta có

$$\triangle D'OE' \sim \triangle D'TA \Rightarrow \frac{\overline{OD'}}{\overline{E'D'}} = \frac{\overline{D'T}}{\overline{D'A}} \Rightarrow \overline{OD'} \cdot \overline{D'A} = \overline{E'D'} \cdot \overline{D'T} = \underbrace{\overline{CD'} \cdot \overline{D'B}}_{|\Pi_V(D')|}$$

Mặt khác, $\overline{D'A} = \overline{OA} - \overline{OD'}$, $\overline{CD'} = \overline{CO} + \overline{OD'}$ và $\overline{D'B} = \overline{OB} - \overline{OD'}$. Do đó ta có

$$\overline{OD'} \cdot \overline{D'A} = \overline{CD'} \cdot \overline{D'B} \Rightarrow \overline{OD'} (\overline{OA} - \overline{OD'}) = (\overline{CO} + \overline{OD'}) (\overline{OB} - \overline{OD'})$$

$$\overline{OD'} \cdot \overline{OA} - \overline{OD'}^2 = \overline{OD'} (\overline{OB} - \overline{CO}) + \overline{CO} \cdot \overline{OB} - \overline{OD'}^2$$

$$\overline{OD'} \left(\underbrace{\overline{OA}}_4 + \underbrace{\overline{CO}}_2 - \underbrace{\overline{OB}}_2 \right) = \underbrace{\overline{CO}}_2 \cdot \underbrace{\overline{OB}}_2 \Rightarrow \overline{OD'} = 4/4 = 1$$

So sánh với kết quả của phần 2 bên trên, ta có $\overline{OD'} = \overline{OD} = 1 \Rightarrow D' \equiv D$. Từ đó ta kết luận D phải là trực tâm của tam giác AEE'.

T và T' nhìn đoạn thẳng D'A ($\equiv DA$) cố định với góc 90° . Do đó, T và T' phải nằm trên vòng tròn (U) định bởi đường kính DA. Do quy ước phát biểu trong **hình 3**, ta biết thêm rằng T (T')

Kết luận: Quỹ tích của T là nửa của (U) nằm bên trên trục $x'Ox$ và quỹ tích của T' là nửa của (U) nằm bên dưới trục $x'Ox$.



- Vì M nằm trên đường đối cực (a) của A nên A phải nằm trên đường đối cực của M (nguyên lý phản hồi, reciprocity). Mặt khác, đường đối cực của M cũng phải đi qua T (do phép vẽ đường đối cực). Do đó đường đối cực của M chính là cát tuyến AE của (V), và ME cũng là một tiếp tuyến của (V).



5

Định nghĩa: Apollonius định nghĩa vòng tròn là tập hợp của những điểm sao cho tỉ số khoảng cách từ đó đến hai điểm cố định (tiêu điểm) là một hằng số. Trong bài toán này thì hằng số đó là tỉ lệ của hàng điểm điều hòa CDBA. (U) là một vòng tròn Apollonius với tiêu điểm B và C.

Định lý: Mọi vòng tròn Apollonius *định bởi hai tiêu điểm* trực giao với mọi vòng tròn *đi qua hai tiêu điểm đó*.

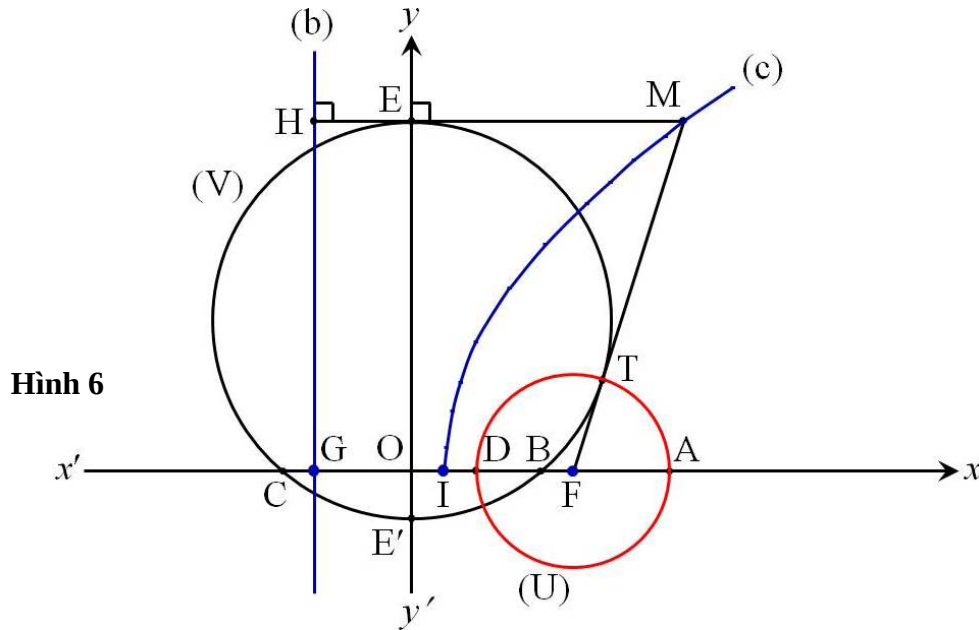
Áp dụng định lý phát biểu bên trên, hai vòng tròn (V) và (U) trực giao. Vì T là giao điểm của hai vòng tròn trực giao nên $PT \perp FT$. Mặt khác, vì MT là tiếp tuyến của (V) nên $PT \perp MT$. Từ đó ta suy ra $FT \parallel MT$ (cùng vuông góc với PT) và cả hai cùng đi qua điểm T.

Kết luận: MT đi qua điểm cố định F trên trục $x'Ox$, và $\overline{OF} = 5/2, \forall (V)$.

Định nghĩa: Một parabole là tập hợp những điểm có cùng khoảng cách đến một điểm cố định (tiêu điểm, focus) và một đường thẳng cố định (đường chuẩn, directrix).

ME là tiếp tuyến của (V) $\Rightarrow ME \perp y'Oy$ và $\overline{ME} = \overline{MT}$. Vẽ đường thẳng (b) $\parallel y'Oy$ đi qua G trên trục $x'Ox$ với tọa độ $\overline{OG} = -\overline{FT} = -\overline{DA}/2 = -3/2$. Ta có

$$\overline{HM} = \overline{HE} + \overline{EM}, \quad \overline{FM} = \overline{FT} + \overline{TM}, \quad \overline{HE} = \overline{GO} = \overline{FT}, \quad \overline{EM} = \overline{TM} \quad \Rightarrow \quad \overline{HM} = \overline{FM}$$



M có cùng khoảng cách đến điểm cố định F ($\overline{OF} = 5/2$) và đường thẳng (b) cố định. Do đó M phải nằm trên parabole (c) với tiêu điểm F và đường chuẩn (b). Mặt khác, ta biết thêm rằng T nằm trong nửa mặt phẳng bên trên trục $x'Ox$.

Kết luận: Quỹ tích của M là nửa của parabole (c) với tiêu điểm F và đường chuẩn (b), nằm trong nửa mặt phẳng bên trên trục $x'Ox$. Đỉnh của (c) nằm trên trục $x'Ox$ với tọa độ $\overline{OI} = 1/2$

Lời bàn (Vũ X. Hoài, cựu học sinh trường trung học Chu Văn An Sài Gòn)

Bài thi được chia ra làm hai phần, phần đầu gồm bốn câu hỏi rất dễ. Tuy câu hỏi số 3 đòi hỏi chút suy nghĩ, nhưng các học sinh ban B trung học thời VNCH với học lực trung bình cũng có thể làm được. Những câu hỏi này đại loại cũng giống những câu ta có thể tìm thấy trong những đề thi SAT ở Hoa Kỳ. Bài toán gồm bốn câu hỏi, mỗi câu lại có nhiều phần. Câu đầu tiên rất dễ, nhanh mắt thì tính nhẩm trong đầu cũng ra. Ba câu sau cùng hơi khó nếu lý thuyết không vững. Loại toán hình học này không được dạy ở bậc trung học ở Hoa Kỳ. Ngay cả ở bậc đại học thì cũng còn tùy ngành chuyên môn. Những ai theo đuổi các môn toán, vật lý hay kỹ thuật (engineering) thì học thêm về những kiến thức hình học này, nhưng ở trình độ cao hơn và dùng những phương pháp mới lạ hơn.

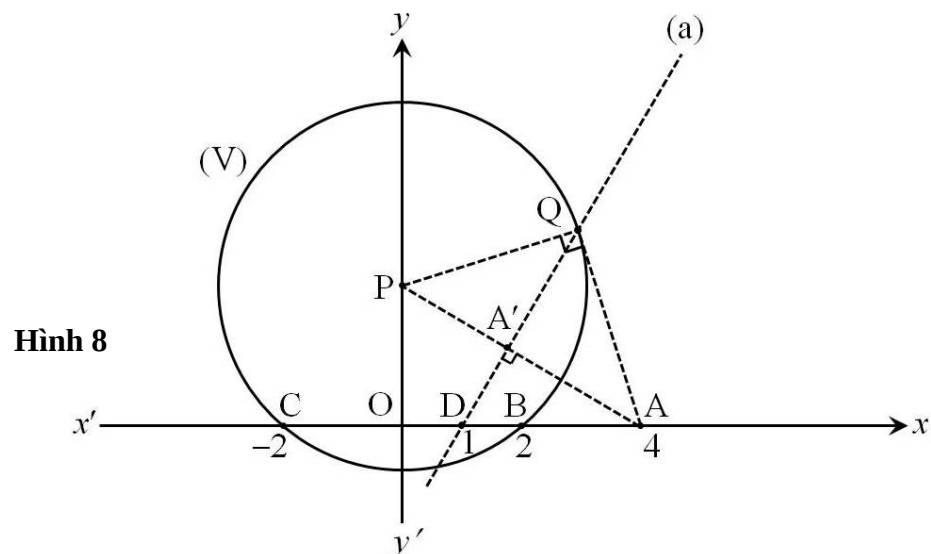
Hình học là môn toán rất lâu đời. Thí dụ như trong bài thi này chúng ta dùng những kiến thức đã có từ thời Euclid và Apollonius vào khoảng thế kỷ thứ 3 trước Thiên Chúa. Sau khi Isaac Newton phát minh ra toán vi phân vào thế kỷ 17 thì người ta lại nghiên cứu hình học dưới khía cạnh khác mà ngày nay chúng ta gọi là hình học giải tích. Trong các ngành kỹ thuật thì người ta còn nghiên cứu hình học phẳng bằng những phép tính trên mặt phẳng số phức (complex plane). Những ai học kỹ thuật điện (electrical engineering) đều phải học qua những môn như signal processing, control theory và microwave/radiating systems. Tất cả các môn này đều dạy về phép biến hình đẳng giác (conformal mapping), một thí dụ điển hình là phép biến hình bilinear transformation. Những khái niệm toán đệ nhị cấp ban B thời VNCH như phương tích, phép biến hình nghịch đảo, cực và đối cực đều có liên hệ chặt chẽ với phép biến hình đẳng giác mà người ta dạy trong chương trình bậc cử nhân và cao học trong những ngành kỹ thuật, với những ứng dụng hết sức thực tiễn chứ không khô khan như hình học thuần túy. Kể ra thì cũng hợp lý vì ban B trung học chuẩn bị cho học sinh theo học toán, khoa học và kỹ thuật. Cùng một đề tài nhưng khi kiến thức còn thô thiển thì ta học theo kiểu vờ lòng. Chừng nào ta học cao thâm hơn thì ta dùng những phương sách mới.

Để thử sức, tôi đã tự cho mình chỉ có bút, thước kẻ và compas, và dùng đồng hồ để tính giờ. Tôi làm xong bài thi sau 64 phút. Xin thưa rằng chẳng phải thánh tướng gì đâu, tôi vốn là kỹ sư điện và cơ khí, hành nghề chuyên môn đã non nửa thế kỷ mà chưa về hưu. Lúc còn ở trường thì tôi học nhiều về những môn nêu trên, rồi sau đi làm cũng dùng những kiến thức đó mà kiếm ăn. Trăm hay không bằng tay quen, lần này đi thi lại trúng tủ. Đọc qua những câu hỏi thì tôi đã đoán ra câu trả lời. Sau đó thì chỉ nhớ lại những kiến thức trung học mà chứng minh thôi.

Theo thống kê VNCH thì chỉ vào khoảng dưới 60% thí sinh thi đỗ Tú Tài II kỳ 1 và dưới 15% (?) đỗ kỳ 2. Xem bài thi thì tôi không ngạc nhiên chút nào, nhất là các giám khảo thường thì khá khó tính khi chấm thi. Tỷ lệ thi đỗ Tú Tài càng về sau càng cao hơn. Thời Pháp thuộc thì chỉ đếm trên đầu ngón tay. Tôi còn nghe kể lại rằng thi Tú Tài Pháp dễ hơn Tú Tài bản xứ. Bây giờ tôi lại ngứa ngáy muốn tìm những đề thi của thập niên 60, 50, 40, ... nhưng không biết tìm đâu ra. Không biết Nha Khảo Thí thời xa xưa dữ dằn tới cỡ nào?

Quay trở lại bài thi. Có khi nào chúng ta tự hỏi mấy ông giáo sư ra đề thi làm sao? Lấy từ đâu ra được mấy bài toán khó dữ vậy? Tôi không biết ai làm sao, nhưng khi còn dạy học không bao giờ

Bây giờ tôi xin trình bày một phương pháp đi giặt lùi để tạo ra đề thi này. Trước hết tôi chọn một hàng điểm điều CBDA như trong **hình 7** dưới đây. Chọn sao cho các con số tròn trịa, thí dụ với tỉ lệ điều điều hòa 1/3 như vị giáo sư này đã chọn. Sau đó thì tôi vẽ một vòng tròn (V) bất kỳ đi qua hai điểm B và C. Đến đây thì tôi biết mặc dù cho (V) thay đổi như thế nào thì phương tích của A đối với (V) là một hằng số (12), miễn là (V) bao giờ cũng đi qua hai điểm cố định B và C.



Tôi biết, do tính chất đã nêu ra trong bài giải, là đường đối cực (polar line) của A đối với (V) phải cắt cát tuyến ABC của (V) ở một điểm sao cho CBDA là một hàng điểm điều hòa. Do đó tôi thừa biết đường đối cực của A đối với (V) ắt phải đi qua D. Đến đây thì câu trả lời chỉ có tôi biết thôi, thí sinh thì chưa. Do đó câu hỏi số 2 của bài toán ra đời “**Chứng tỏ rằng đường đối cực của A đối với (V) đi qua một điểm cố định D và tính tọa độ của D.**” Ai nhớ và biết cách áp dụng định lý này thì nhanh lắm, chỉ mất vài phút vẽ **hình 8** và tính toán đơn giản như tôi đã làm trong phần bài giải bên trên. Nhưng nếu không nhớ thì trời cũng chưa đến nỗi sập vì ta vẫn có thể dùng tam-giác đồng dạng như sau. Từ A vẽ tiếp tuyến AQ với (V). Ta có

$$\triangle A'DA \sim \triangle OPA \Rightarrow \frac{\overline{DA}}{\overline{A'A}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{DA} \cdot \overline{OA} = \overline{PA} \cdot \overline{A'A} \quad (1)$$

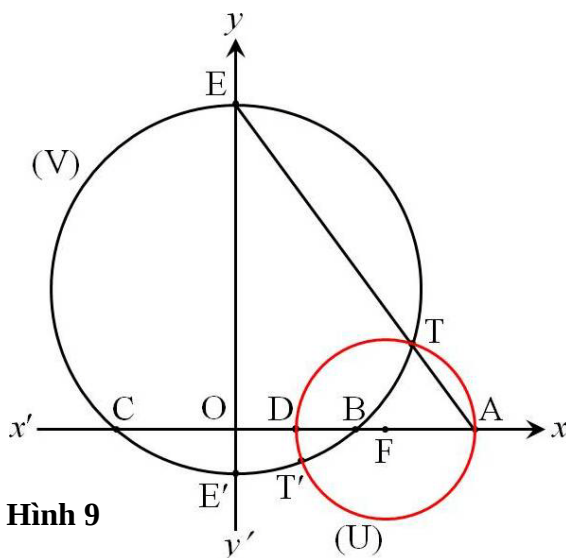
$$\triangle A'QA \sim \triangle QPA \Rightarrow \frac{\overline{QA}}{\overline{A'A}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{QA}} \Rightarrow \overline{QA}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{A'A} \quad (2)$$

Mặt khác, như ta đã nói bên trên, phương tích của A đối với (V) là 12. Do đó, $\overline{QA}^2 = 12$. So sánh hai phương trình (1) và (2), ta có

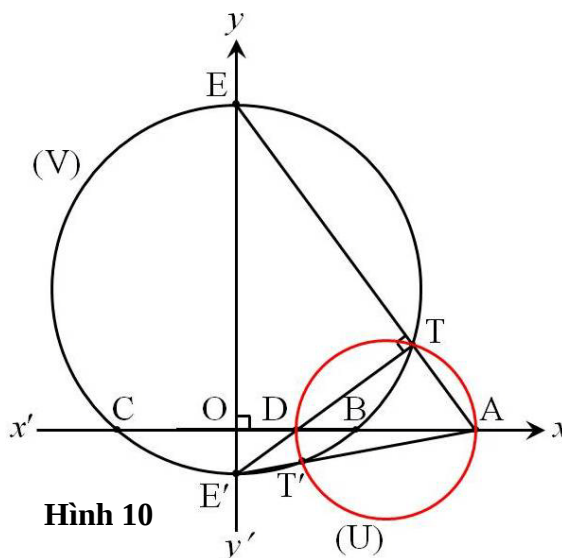
$$\overline{DA} \cdot \overline{OA} = \overline{QA}^2 \Rightarrow \overline{DA} = \overline{QA}^2 / \overline{OA} = 12/4 = 3 \Rightarrow \overline{OD} = \overline{OA} - \overline{DA} = 4 - 3 = 1$$

Chỉ mất thêm tí thì giờ và phép tính hơi rắc rối hơn một tí teo, nhưng vẫn cùng kết quả, không có sao hết. Để tổng kết, lưu ý rằng tôi vẽ hàng điểm điều hòa trước, rồi vẽ vòng tròn (V) sau, nhưng bài thi lại bắt thí sinh vẽ vòng tròn (V) trước và kết luận rằng CBDA phải là một hàng điểm điều hòa. Như vậy là tôi thì đi giật lùi, nhưng bài thi lại bắt thí sinh đi về phía trước. Đó là câu chuyện của câu hỏi số 2 của bài toán. Còn những câu số 3 và 4 thì ở đâu mà ra?

Hai câu sau cùng của bài toán dựa trên vài tính chất của vòng tròn Apollonius và hàng điểm điều hòa. Tôi vẽ vòng tròn (U) định bởi đường kính DA, tâm ở F (trung điểm của DA). Apollonius đã chứng minh là (V) và (U) trực giao. Gọi T và T' là giao điểm của (V) và (U). Một tính chất mà tôi biết là ba điểm ATE thẳng hàng và ba điểm AT'E' thẳng hàng.



Hình 9



Hình 10

Tôi nhận thấy $E'T \perp AE$ và $DT \perp AE$. Do đó ba điểm E' , D và T thẳng hàng. Điểm D là giao điểm của hai đường cao $E'T$ và AO ; do đó D phải là trực tâm của tam-giác AEE' . Mặt khác, vì T và T' là giao điểm của (U) cố định và (V) lưu động nên quỹ tích của T và T' phải nằm trên (U) khi (V) thay đổi. Đến đây thì câu hỏi số 3 của bài toán ra đời “**Vòng (V) cắt trục $y'Oy$ tại E và E' . AE và AE' lại cắt (V) tại T và T' . Chứng tỏ D là trực tâm của tam giác AEE' . Tìm quỹ tích của T và T' khi (V) thay đổi.**” Mục đích của câu hỏi này là bắt thí sinh chứng minh những tính chất nêu trên. Tuy câu hỏi đơn giản nhưng bên trong có chút bẫy rập, thí sinh nào sơ ý là mắc bẫy. Bẫy này nằm ở chỗ là quỹ tích của T và T' không phải là toàn thể vòng tròn (U) , mà chỉ là một nửa của (U) như tôi đã trình bày trong bài giải. Điều quan trọng khi giải toán về quỹ tích là phải chứng minh cả hai phần thuận (necessity) và đảo (sufficiency). Phần thuận cho biết T và T' nhất thiết phải nằm trên (U) , nhưng phần đảo giới hạn những quỹ tích này trong nửa của (U) .

Câu hỏi số 4 của bài toán được đặt căn bản trên hai định lý. Định lý thứ nhất là “Nếu R nằm trên đường đối cực của S thì S phải nằm trên đường đối cực của R , đối với cùng một vòng tròn.” Định lý thứ nhì là “Ba điểm thẳng hàng nếu và chỉ nếu ba đường đối cực tương ứng đồng quy.” Trong câu số 4 thì những điểm thẳng hàng là ATE và $AT'E'$. Điểm M là nơi ba đường đối cực của A , T và E đồng quy.

Giả thử Nha Khảo Thí VNCH muốn dùng lại đề tài này cho một kỳ thi Tú Tài khác thì họ có thể thay đổi những câu hỏi của bài toán như thế nào? Sau khi đã nghiên cứu vấn đề đến độ “con ong đã tỏ đường đi lối về” thì chúng ta có thể dùng cùng một chủ đề để ra một đề thi khác như sau.

Bài toán (mỗi câu 3 điểm)

Trong một hệ trục tọa độ chuẩn $x'Ox$, $y'Oy$ cho 3 điểm A , B , C nằm trên $x'Ox$ sao cho $\overline{OA}=5$, $\overline{OB}=-\overline{OC}=3$. (V) là một vòng tròn lưu động qua B và C , cắt $y'Oy$ tại D và D' . Hai tiếp tuyến của (V) vẽ từ A cắt (V) ở E và E' . Gọi (a) là đường thẳng đi qua E và E' . Gọi điểm nghịch đảo của A đối với (V) là A' và giao điểm của (a) với trục $x'Ox$ là F .

1. Tính phương tích của A đối với vòng tròn (V) . Tìm quỹ tích của E và E' khi (V) thay đổi.
2. Tính phương tích của F đối với vòng tròn (V) . Tìm quỹ tích của A' khi (V) thay đổi.
3. DE và $D'E$ cắt trục $x'Ox$ ở G và G' . Chứng minh A là trung điểm của đoạn thẳng GG' .
4. Chứng minh rằng G và G' cố định, và tính tọa độ của hai điểm đó.

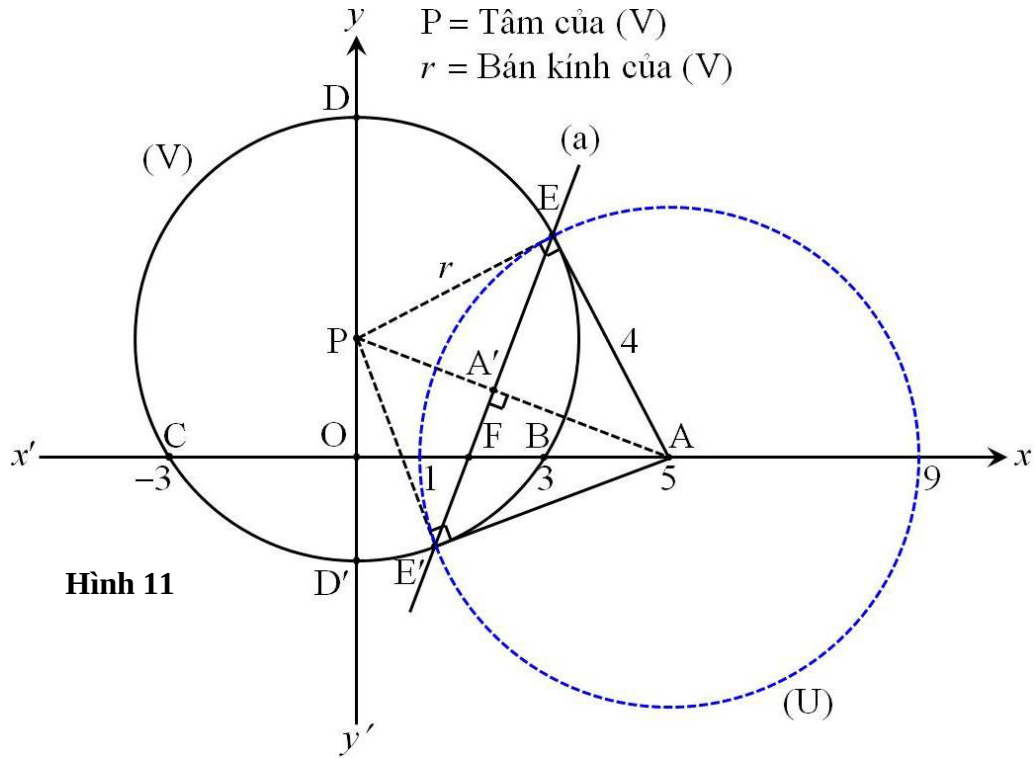
Bài giải

Bài toán này đại khái cũng giống như bài thi Tú Tài 2 năm 1971 mà chúng ta đã giải bên trên. Độ khó cũng không khác nhau bao nhiêu, có khác chăng là những tính chất đặc biệt của những vòng tròn Apollonius. Trước tiên chúng ta vẽ hình theo đầu bài (**hình 11**).

1. Tính phương tích của A đối với vòng tròn (V) . Tìm quỹ tích của E và E' khi (V) thay đổi.

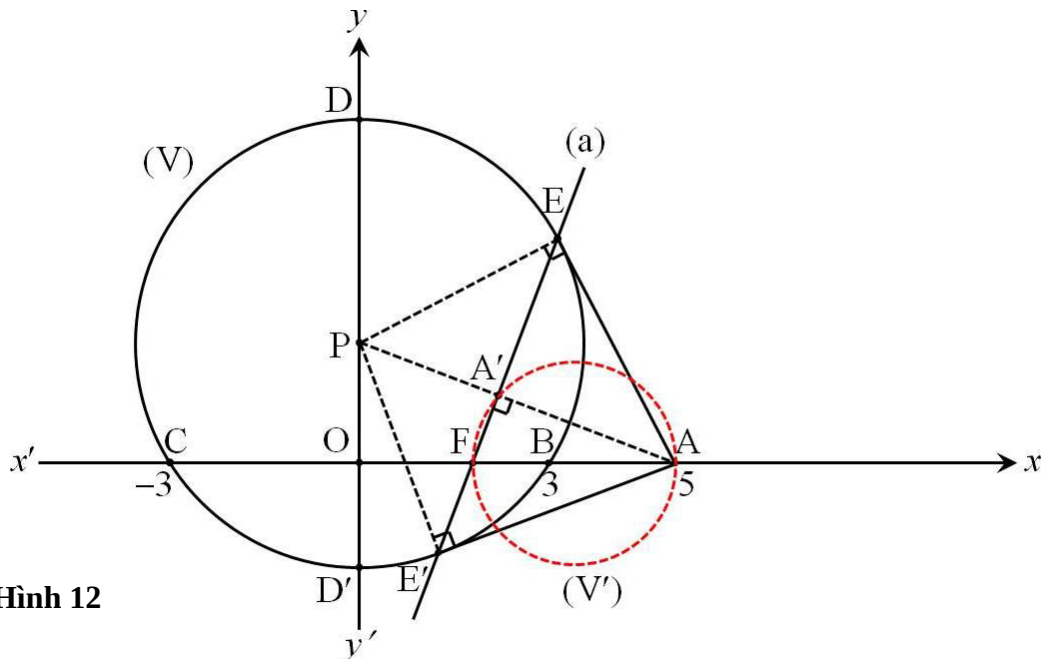
$$\Pi_V(A) = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = (\overline{OB} - \overline{OA})(\overline{OC} - \overline{OA}) = (3 - 5)(-3 - 5) = 16, \quad \forall (V)$$

Mặt khác, $\Pi_V(A) = \overline{AE}^2 = \overline{AE'}^2 = 16 \Rightarrow \overline{AE} = \overline{AE'} = 4, \forall (V)$. Do đó quỹ tích của E và E' là vòng tròn (U) tâm A, bán kính 4.



Hình 11

2. Tính phương tích của F đối với vòng tròn (V). Tìm quỹ tích của A' khi (V) thay đổi.
Trước hết ta cần tính tọa độ của F. Hai tam giác A'FA và OPA đồng dạng, ta có



Hình 12

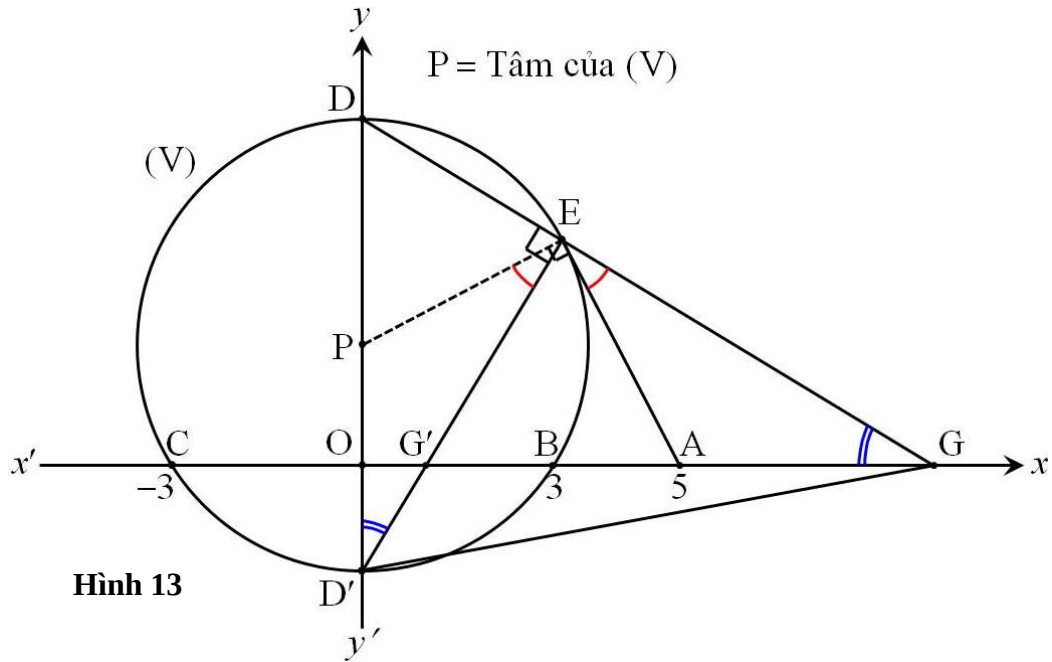
$$\begin{aligned}\frac{\overline{FA}}{\overline{A'A}} &= \frac{\overline{PA}}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{OA} \cdot \overline{FA} = \overline{PA} \cdot \overline{A'A} = \overline{PA} \cdot (\overline{PA} - \overline{PA'}) = \overline{PA}^2 - \overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \Pi_V(A) \\ \Rightarrow \overline{FA} &= \frac{\Pi_V(A)}{\overline{OA}} \Rightarrow \overline{OF} = \overline{OA} - \overline{FA} = \overline{OA} - \frac{\Pi_V(A)}{\overline{OA}} = 5 - \frac{16}{5} \\ \Rightarrow \overline{OF} &= \frac{9}{5}, \quad \forall(V)\end{aligned}$$

Do đó F là một điểm cố định khi (V) thay đổi. Phương tích của F đối với (V):

$$\Pi_V(F) = \overline{FB} \cdot \overline{FC} = (\overline{OB} - \overline{OF})(\overline{OC} - \overline{OF}) = \left(3 - \frac{9}{5}\right)\left(-3 - \frac{9}{5}\right) = -\frac{144}{25}, \quad \forall(V)$$

A' nhìn đoạn thẳng FA cố định dưới góc 90° . Do đó quỹ tích của A' là vòng tròn (V') với đường kính FA (hình 12).

3. DE và D'E cắt trục $x'Ox$ ở G và G'. Chứng minh A là trung điểm của đoạn thẳng GG'.



Hình 13

$$EP \perp EA \quad \text{và} \quad ED' \perp EG \Rightarrow \angle PED' = \angle AEG$$

$$D'P \perp GA \quad \text{và} \quad D'E \perp GE \Rightarrow \angle PD'E = \angle AGE$$

Tam giác PD'E cân $\Rightarrow \angle PD'E = \angle PED'$. Do đó $\angle AGE = \angle AEG$ (tam giác AEG cân).

Tương tự như trên ta có thể dễ dàng chứng minh $\angle AG'E = \angle AEG'$ (tam giác AEG' cân).

Do đó ta kết luận $AE = AG = AG'$ và điều này cũng có nghĩa A là trung điểm của đoạn thẳng GG'.

4. Chứng minh rằng G và G' cố định, và tính tọa độ của hai điểm đó.

Điểm G' là trực tâm của tam giác GDD' (giao điểm của hai đường cao D'E và GO); do đó

$$\overline{OG'} \cdot \overline{G'G} = \overline{D'G'} \cdot \overline{G'E} = |\Pi_v(G')| = \overline{G'B} \cdot \overline{CG'}$$

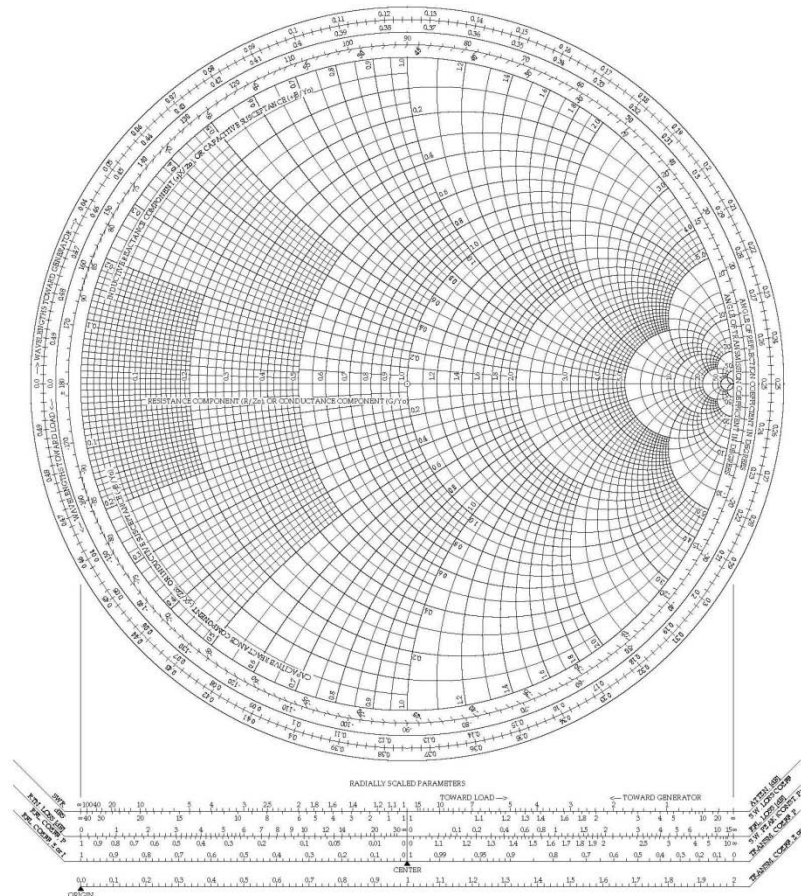
$$\overline{OG'} \underbrace{(\overline{OG} - \overline{OG'})}_{\overline{G'B}} = \underbrace{(\overline{OB} - \overline{OG'})}_{\overline{G'B}} \cdot \underbrace{(\overline{CO} + \overline{OG'})}_{\overline{CG'}} \Rightarrow \overline{OG'} \cdot \overline{OG} = \overline{OB} \cdot \overline{CO} = \overline{OB}^2 = \overline{OC}^2$$

Chúng ta lập tức nhận thấy bên trên là công thức Newton cho hàng điểm điều hòa C, B, G', G. Mặt khác, vì A là trung điểm của đoạn thẳng GG' và CBG'G = -1, ta có

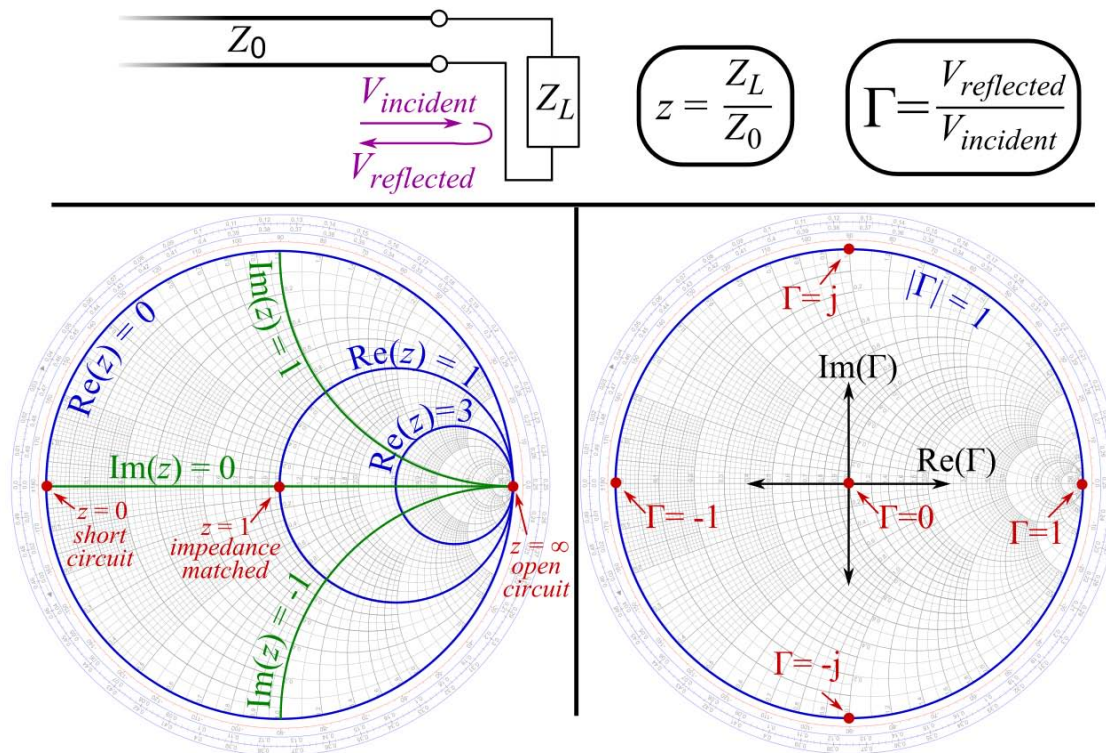
$$\overline{AG}^2 = \overline{AG'}^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \Pi_v(A) = 16 \Rightarrow \overline{AG} = -\overline{AG'} = 4$$

Do đó ta kết luận G và G' cố định, $\overline{OG} = \overline{OA} + \overline{AG} = 9$, $\overline{OG'} = \overline{OA} + \overline{AG'} = 1$.

Lời kết: Loại toán này nói chung dựa vào tính chất của hàng điểm điều hòa và hai loại vòng tròn Apollonius. Loại thứ nhất gồm những vòng tròn đi qua hai điểm cố định. Loại thứ nhì gồm những vòng tròn có đường kính định bởi hai điểm cố định khác sao cho cả bốn điểm lập thành một hàng điểm điều hòa. Hai loại vòng tròn này bao giờ cũng trục giao và có nhiều tính chất khác. Những ai đã từng học kỹ thuật điện (electrical engineering) đều biết muốn lấy bằng cử nhân thì đều phải học vài lớp về vi-ba (microwave theory). Trong những lớp này người ta thường dạy sinh viên về một dụng cụ gọi là Smith chart, mặt mũi của nó nom như hình dưới đây, chuyên dùng cho những con tính dính dáng đến transmission lines.



Nếu chúng ta để ý cho kỹ thì thấy Smith charts gồm có những vòng tròn trực giao to nhỏ. Những vòng tròn này gồm hai loại, một loại có tâm nằm trên trục hoành độ và một loại đi qua một điểm cố định trên trục hoành độ. Hai loại vòng tròn này chẳng qua chỉ là một trường hợp đặc biệt của bài toán mà chúng ta phân tích trong bài này. Trong trường hợp Smith charts thì hàng điểm điều hòa thu gọn lại thành hai điểm.



Tôi quen thuộc với loại toán này vì tôi là kỹ sư điện với mấy chục năm kinh nghiệm trong ngành viễn thông. Vừa đọc qua đầu bài thi thì trong đầu tôi đã ẩn hiện cái Smith chart. Tôi biết trước gần hết đáp số của các câu hỏi nên chỉ cần ít thì giờ để chứng minh thôi. Chỉ có câu số 4 trong bài toán (tìm quỹ tích của điểm M) thì phải suy nghĩ một chút mới ra cái parabol, nhưng cũng không khó khăn lắm. Đối với tôi thì không có bài toán nào là bài toán cũ cả. Ngay như những bài toán mà tôi rất quen thuộc, nhưng khi nghiên cứu thêm thì gần như bao giờ cũng tìm ra được cái mới. Tôi có ba người con, cả ba đều nói nghiệp tôi làm kỹ sư điện. Ngày chúng còn đi học, đôi khi dạy chúng học mà tôi cứ ngẩn người ra vì vừa nghĩ ra những cái mà tôi chưa từng nghĩ đến. Mỗi lần như vậy là tôi lại phải tự viết cho mình một cái note, kẹp vào quyển sách để khỏi quên. Vị giáo sư nào đề nghị bài toán này cho Nha Khảo Thí đã dạy thêm cho tôi một kiến thức mới qua câu hỏi số 4 của bài toán. Ôn lại cái cũ mà biết cái mới (ôn cố tri tân) là lẽ đó!