NGUYỄN VĂN PHÚ

hình-học
KHÔNG-GIAN
Lớp Mười Một A

LỜI NÓI ĐẦU

TRƯỚC ĐÂY, hai lớp Đệ-nhị A (Khoa-học Thực-nghiệm) và Đệ-nhị B (Khoa-học Toán) cùng theo một chương-trình Hình-học Không-gian, chỉ khác nhau ở một điều là các bài tập cho ban A nhẹ hơn ban B.

Theo tinh-thần chương-trình mới, môn Toán của lớp Đệ nhị A nghiêng hẳn về Đại-số và Lượng-giác. Phần Hình-học không-gian vẫn còn ; nhưng nếu đọc kỹ chương-trình, ai cũng nhận thấy ngay đó là chương-trình Hình-học của Đệ-nhị C khi trước.

Được may-mắn theo rõi các cuộc thảo-luận trong việc sửa đổi chương-trình và có trách-nhiệm giảng dạy ở nhiều lớp Đệ nhị A, B, C trong những năm gần đây, chúng tôi đã so-sánh kỹ-lưỡng những khuynh-hướng của chương-trình và trình-độ của học-sinh ba ban A, B, C. Vì thế, khi soạn cuốn sách này cho lớp Đệ-nhị A, chúng tôi theo những ý-kiến chính sau đây :

1. Phân-phối chương-trình thành 19 bài, bài ngắn thì giảng trong 1 giờ, bài dài thì giảng trong 2 giờ.

2. Lược bớt những chỗ phụ-thuộc, chỉ nhấn mạnh vào các điểm chính.

3. Đặt một số bài tập vừa phải và tương-đối dễ ; tuy-nhiên, không coi trình-độ về Hình-học của học-sinh Đệ-nhị A (mới) như Đệ-nhị C (cũ).

4. Giải một vài bài toán sau mỗi bài để học-sinh (nhất là các bạn tự học) xem thêm, hầu bù đắp một phần nào số giờ toán ít-ỏi (4 giờ) của ban A.

5. Chú-trọng đến phép tính nhiều phần nào hay, phần ấy để học-sinh ứng-dụng những điều đã học ở Đại-số và Lượng-giác (chúng tôi đã cho in tiếp cuốn Đại-số-học để theo đuổi mục-đích ấy).

Chúng tôi hy-vọng rằng sự cố-gắng của chúng tôi sẽ làm bớt được thời-giờ chép bài của các em học-sinh trong lớp và mong rằng lòng yêu mến của các đồng-nghiệp và độc-giả sẽ thể-hiện bằng những lời phê-bình quý-báu mà chúng tôi xin chân-thành cảm-tạ trước.

N. V. P.

CHƯƠNG-TRÌNH

Hình-học không-gian

ĐỆ-NHỊ KHOA-HỌC THỰC-NGHIỆM

I.— Mặt phẳng và đường thẳng. Cách xác-định ; vị-trí tỉ-đối. Những đường thẳng và mặt phẳng song-song. Đường thẳng và mặt phẳng vuông góc. Đoạn thẳng góc và đoạn xiên phát-xuất từ một điểm tới một mặt phẳng.

Góc nhị-diện ; mặt phẳng vuông góc.

Định-nghĩa một góc tam-diện.

II.— Phép chiếu thẳng vào một mặt phẳng : hình chiếu của một điểm, của một đoạn thẳng, của một đường thẳng.

Góc của một đường thẳng và một mặt phẳng.

Định-nghĩa phép đối-xứng qua một đường thẳng, qua một điểm hay qua một mặt phẳng. Định-nghĩa trục, tâm hay mặt phẳng đối-xứng của một hình.

III.— Định-nghĩa khối bình-hành (hình hộp xiên), hình lăng-trụ, hình tháp, thể-tích của khối chữ-nhật (hình hộp chữ-nhật).

Công-thức (không học cách chứng-minh) để tính thể-tích của hình lăng-trụ, thể-tích của hình tháp.

Diện-tích xung-quanh của hình lăng-trụ thẳng và của hình tháp đều-đặn.

IV.— Định-nghĩa một mặt trụ và một mặt nón có đường chuẩn tròn. Hình trụ và hình nón tròn xoay.

Công-thức để tính diện-tích xung-quanh của hình trụ và của hình nón tròn xoay (không chứng-minh).

Công-thức để tính thể-tích của hình trụ và của hình nón tròn xoay (không chứng-minh).

V.— Hình cầu, sự tương-giao với một đường thẳng. Tiếp-tuyến của hình cầu. Thiết-diện phẳng, mặt phẳng tiếp-xúc. Cách định một hình cầu.

Định-nghĩa hình trụ và hình nón ngoại-tiếp với một hình cầu. Công thức để tính diện-tích và thể-tích hình cầu (không chứng-minh).

Trích « Chương-trình Trung-học »

1

Đường thẳng và mặt phẳng

1. ĐẠI-CƯƠNG.

1. 1. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG.

a) Một sợi dây căng thẳng là *hình ảnh* của một *đường thẳng*. Ta *công-nhận* rằng : **qua hai điểm, có một đường thẳng và chỉ một thôi.**

Một đường thẳng không có bề dầy nhưng dài vô-hạn.

Một đường thẳng có thể *trượt* và *quay* trên chính nó.

b) Một mặt nước thoáng yên-lặng là *hình-ảnh* của một *mặt phẳng*. Ta *công-nhận* rằng : **khi một đường thẳng có hai điểm ở trong một mặt phẳng thì nó hoàn-toàn ở trong mặt nó.**

Hình 1

Một mặt phẳng có thể *trượt* và *xoay* trên chính nó.

Mặt phẳng không có bề dầy nhưng rộng vô-cùng.

Một mặt phẳng được biểu-diễn bằng một hình chữ-nhật. Nó rộng vô-cùng nhưng ta chỉ vẽ có thế. Nhìn nghiêng, hình chữ-nhật thành hình *bình-hành*.

1. 2. VỊ-TRÍ CỦA MỘT ĐƯỜNG THẲNG ĐỐI VỚI MỘT MẶT PHẲNG.

a) Ta đã nói : nếu một đường thẳng có *hai* điểm ở trong một mặt phẳng thì nó hoàn-toàn ở trong mặt đó.

b) Khi một đường thẳng *chỉ có một điểm chung* độc nhất với một mặt phẳng, ta nói rằng nó *cắt* mặt phẳng hay nó *xuyên qua* mặt phẳng, và mặt phẳng đó cắt đường thẳng làm hai nửa, *mỗi nửa ở một bên* của mặt phẳng.

c) Một mặt phẳng chia không-gian làm hai *nửa không-gian*. Nếu lấy một điểm A ở bên nọ, một điểm B ở bên kia rồi nối AB thì đường thẳng AB xuyên qua mặt phẳng tại *một* điểm và *chỉ một thôi*.

d) Khi một đường thẳng và một mặt phẳng không có điểm nào chúng (dù kéo dài bao nhiêu chăng nữa) ta nói rằng đường thẳng *song-song* với mặt phẳng.

2. CÁCH ĐỊHH MỘT MẶT PHẲNG.

1. 3. CÔNG-LÝ.

Ta *công-nhận* điều sau đây :

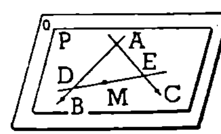
« **Qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng, có một mặt phẳng** ».

Khi cho AB cố-định, C lưu-động thì mỗi vị-trí của C cho ta một mặt phẳng. Vậy **qua hai điểm A, B, có vô-số mặt phẳng.**

1. 4. ĐỊNH-LÝ.

Qua ba điểm không thẳng hàng, có một mặt phẳng và chỉ một thôi.

Ta hãy chứng-minh rằng nếu hai mặt phẳng P và Q có ba điểm chung A, B, C *không thẳng hàng* thì chúng trùng nhau *(h. 2)*.



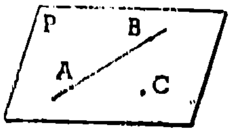
Hình 2

Mỗi đường thẳng AB và AC có hai điểm ở trên P nên hoàn-toàn nằm trong P. Vì lý-do tương-tự, AB và AC cũng nằm trong Q. Lấy một điểm M ở trong P rồi kẻ một đường thẳng đựng trong P và cắt AB, AC lần-lượt ở D và E. Vì AB, AC đựng trong Q nên hai điểm D, E cũng ở trên Q. Do đó đường thẳng DE và M cũng ở trên Q.

Bất cứ điểm M nào của P cũng ở trên Q, tức là P, Q trùng với nhau. Nói khác đi, *ba điểm không thẳng hàng định được một mặt phẳng và chỉ một thôi.*

1. 5. HỆ-LUẬN 1.

Qua một đường thẳng và một điểm ở ngoài, có một mặt phẳng và chỉ một thôi.



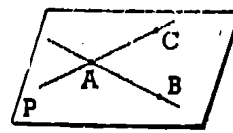
Hình 3

Coi một điểm C ở ngoài đường thẳng D (*h. 3*). Lấy hai điểm A, B trên D. Ba điểm A, B, C không thẳng hàng định được một mặt phẳng *độc-nhất* P. P đựng điểm C và đường thẳng D.

1. 6. HỆ-LUẬN 2.

Qua hai đường thẳng đồng-qui có một mặt phẳng và chỉ một thôi.

Gọi điểm chung là A, lấy một điểm B trên đường thẳng thứ nhất, một điểm C trên đường thẳng thứ nhì, rồi chứng-minh tương-tự như trên (*h. 4*).



Hình 4

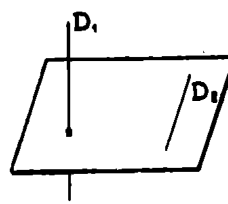
Những điều học trên ta cho ta ba cách sau này để định một mặt phẳng:

Ta định một mặt phẳng bằng:

— Ba điểm không thẳng hàng.

— Một đường thẳng và một điểm ở ngoài đường đó.

— Hai đường thẳng đồng-qui.



Hình 5

Chú-ý. Nếu hai đường thẳng không cùng ở trên một mặt phẳng, ta nói rằng chúng là *hai đường thẳng bất-kỳ* (*h. 5*).

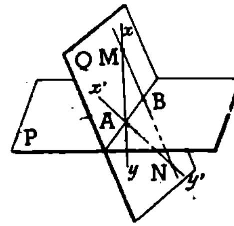
3. SỰ TƯƠNG-GIAO CỦA HAI MẶT PHẲNG.

1. 7. ĐỊNH-LÝ.

Khi hai mặt phẳng phân-biệt có một điểm chung A thì chúng có một đường thẳng chung đi qua A. Đường thẳng đó được gọi là giao-tuyến hay đường tương-giao của hai mặt phẳng.

Xét hai mặt phẳng P, Q khác nhau. Giả-sử chúng có một điểm A chung. Ta hãy chứng-minh rằng:

1. Hai mặt phẳng P, Q có một đường thẳng chung.



Hình 6

Trên mặt phẳng Q, ta kẻ hai đường thẳng không đặc-sắc xAy, $x'Ay'$ (*h. 6*). Giả-sử hai đường thẳng đó không đựng trong P. Như thế mỗi đường bị P chia là hai nửa, mỗi nửa ở một bên P. Giả-sử Ax, Ax' cùng ở về một bên. Lấy trên Ax một điểm không đặc-sắc M; lấy trên Ay' một điểm không đặc-sắc N. Nối MN; MN xuyên qua P tại một điểm B khác A. Vì hai điểm A, B ở trên P và cùng ở trên Q nên đường thẳng AB vừa ở trên P, vừa ở trên Q. Nói khác đi, đường thẳng AB là đường thẳng chung cho P và Q.

2. Ngoài đường thẳng AB ra, hai mặt P, Q không còn điểm nào chung nữa.

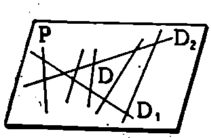
Thật vậy, nếu hai mặt phẳng P và Q còn có điểm chung thứ ba nữa (gọi là C) *ở ngoài* đường thẳng AB thì chúng *trùng* nhau, vì ba điểm A, B, C không thẳng hàng chỉ định được một mặt phẳng thôi. Điều đó trái với giả-thiết, vì giả-thiết cho P, Q là hai mặt phẳng phân-biệt. Bó-buộc ta phải nhận rằng P, Q không còn điểm nào chung nữa.

1. 8. LỜI DẶN.

Muốn chứng-minh rằng ba điểm hay nhiều điểm thẳng hàng với nhau, ta có thể chứng-minh rằng chúng là những điểm chung của hai mặt phẳng phân-biệt.

4. CÁCH PHÁT-SINH MẶT PHẲNG.

1. 9. CÁCH THỨ NHẤT.

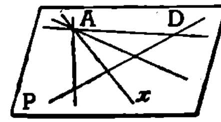


Hình 7

Coi hai đường thẳng D_1 và D_2 đồng-qui ở A. Khi một đường thẳng D lưu-động nhưng dựa vào D_1 và D_2 tại hai điểm khác nhau thì nó phát-sinh ra mặt phẳng P, là mặt định bởi D_1 và D_2. Nói khác đi, *quỹ-tích của D là mặt phẳng P (h. 7).*

1. 10. CÁCH THỨ NHÌ.

Coi một đường thẳng D và một điểm A *ở ngoài.* Khi một đường thẳng Ax lưu-động nhưng dựa vào D thì nó phát-sinh ra mặt phẳng P, là mặt định bởi D và A. Nói khác đi. *quỹ-tích của Ax là mặt phẳng P (h. 8).*



Hình 8

Sau này, ta còn học thêm vài cách phát-sinh mặt phẳng nữa.

5. HÌNH THÔNG-DỤNG.

1. 11. TAM-DIỆN.

Tam-diện hay *góc tam-diện* hay *góc ba mặt* là hình hợp bởi ba nửa đường thẳng phát-xuất từ một điểm, không cùng nằm trong một mặt phẳng, đôi một là làm thành một góc lồi.

Trong tam-diện Oxyz : O gọi là *đỉnh*; Ox, Oy, Oz gọi là ba *cạnh*; $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$, $\widehat{zOx}$ gọi là ba *mặt*.

Nếu ba mặt đều là góc vuông cả thì ta có một *tam-diện ba góc vuông*.

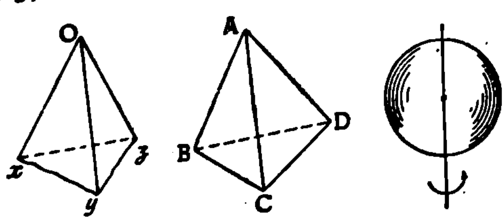
1. 12. TỨ-DIỆN.

Tứ-diện hay *khối bốn mặt* là một hình tháp đáy tam-giác mà ta đã gặp ở lớp dưới *(h. 9)*.

Nếu bốn mặt của tứ-diện là bốn *tam-giác đều* thì ta có một *tứ-diện đều*.

1. 13. HÌNH CẦU.

Hình cầu là quỹ-tích những điểm ở trong không-gian cách đều một điểm cố-định, gọi là *tâm*.



Hình 9

Ta có thể coi hình cầu là một *hình tròn xoay* gây bởi một vòng tròn khi nó quay quanh một đường kính *(h. 9)*.

BÀI TẬP

1. 1. *Cho một tam-giác ABC và một mặt phẳng P không chứa A, B, C. Giả-sử AB, BC, CA cắt mặt P tại D, E, F theo thứ-tự. Chứng-minh rằng ba điểm D, E, F thẳng hàng với nhau.*

1. 2. *Cho một đoạn AB ở ngoài một mặt phẳng P. Gọi S là một điểm lưu-động trong không-gian. Giả-sử SA, SB cắt P tại C, D theo thứ-tự. Chứng tỏ rằng thường thường đường thẳng CD đi qua một điểm cố-định.*

1. 3. *Cho một tam-giác ABC, một mặt phẳng P cố-định. Gọi S là một điểm lưu-động trong không-gian. Giả-sử SA, SB, SC cắt P tại A′, B′, C′ theo thứ-tự. Chứng-tỏ rằng mỗi đường thẳng A′B′, B′C′, C′A′ thường-thường đi qua một điểm cố-định.*

1. 4. *Hãy vẽ một đường thẳng đi qua một điểm O cho sẵn và cắt hai đường thẳng bất-kỳ D_1, D_2 cho sẵn.*

Hãy vẽ một đường thẳng cắt ba đường thẳng bất-kỳ D_1, D_2, D_3 cho sẵn.

1. 5. *Trong một mặt phẳng P, cho hai đường thẳng Ox, Oy. Một đường thẳng D cắt P tại M. Gọi I là một điểm lưu-động của D. Hãy vẽ giao-tuyến của hai mặt phẳng (I, Ox) và (I, Oy). Chứng-tỏ rằng giao-tuyến đó nằm trên một mặt phẳng cố-định.*

1. 6. *Cho hai đường thẳng cố-định Ox, Oy ở trong một phẳng P. Gọi M, N là hai điểm cố-định ở ngoài P. Q là một mặt phẳng lưu-động, chứa M và N, Q cắt Ox, Oy lần-lượt ở E, F.*

1. Chứng-tỏ rằng EF đi qua một điểm cố-định.

2. EN cắt FM tại D. Quỹ-tích của điểm D.

1. 7. *Cho một hình tứ-diện SABC. Gọi D, E, F là trung-điểm của AB, BC, SA.*

1. Vẽ giao-tuyến SH của hai mặt SDC, SAE và giao-tuyến CI của hai mặt SDC, BFC.

2. H nằm trong mặt ABC, I nằm trong mặt SAB ; HS có cắt CI không ? Nếu có, gọi giao-điểm là O. Chứng-minh rằng IH song-song với SC. Tính tỉ-số $\frac{OH}{OS}$.

1. 8. *Cho một hình tứ-diện ABCD. Lấy một điểm F trên AB ; E trên AC ; G trên BD. Giả-sử EF không song-song với BC.*

1. Tìm giao-tuyến của hai mặt phẳng EFC và BCD.

2. Tìm giao-điểm của AD và CD với mặt phẳng EFG.

1. 9. *Cho một hình tứ-diện ABCD. Chứng-tỏ rằng những mặt phẳng định bởi D và mỗi trung-tuyến (hay mỗi đường cao, hay mỗi đường phân-giác trong của tam-giác ABC) thì đồng-qui, nghĩa là những mặt phẳng đó có một đường thẳng chung.*

7

1. 10. *Cho hai tam-giác ABC, A'B'C' theo thứ-tự ở trong hai mặt phẳng P, Q mà giao-tuyến là △. Giả-sử BC cắt B'C' ở α; AC cắt A'C' ở β; AB cắt A'B' ở γ.*

1. Có thể nói gì về ba điểm α, β, γ?

2. Chứng-tỏ rằng AA', BB' cùng ở trong một mặt phẳng và thường cắt nhau.

3. Chứng-tỏ rằng AA', BB', CC' thường đồng-qui.

TOÁN

Cho một góc tam-diện Oxyz. Trên Ox, người ta lấy hai điểm A, A'. Trên Oy, người ta lấy hai điểm B, B'. Trên Oz, người ta lấy hai điểm C, C'.

1. Chứng-tỏ rằng BC và B'C' thường cắt nhau tại một điểm α; CA và C'A' thường cắt nhau tại một điểm β; AB và A'B' thường cắt nhau tại một điểm γ.

2. Chứng-tỏ rằng α, β, γ là ba điểm thẳng hàng.

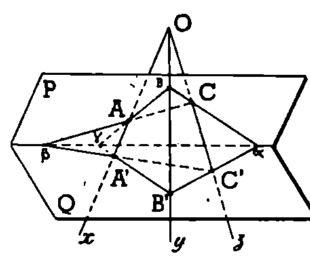
BÀI GIẢI

1. Sự tương-giao của BC và B'C'.

Hai đường thẳng BC và B'C' cùng ở trong mặt phẳng *yOz*. Vì thế, *thường thường* chúng cắt nhau tại một điểm α. Đặc-biệt, chúng có thể song-song với nhau.

[Dùng định-lý Thalès đã học ở lớp Đệ-Tam thì ta biết rằng: *điều-kiện ắt có và đủ* để BC song-song với B'C' là:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OC'}}$$]



Hình 10

Lý-luận tương-tự, ta biết rằng CA và C'A' thường cắt nhau tại một điểm β; AB và A'B' thường cắt nhau tại một điểm γ.

2. Sự thẳng hàng α, β, γ.

Ta coi hai mặt phẳng phân-biệt (ABC) và (A'B'C').

Đường thẳng BC có hai điểm B, C ở trên mặt (ABC) nên nó hoàn-toàn ở trên mặt đó. α là một điểm của đường thẳng BC nên α thuộc vào mặt (ABC).

Đường thẳng B'C' có hai điểm B', C' ở trên mặt (A'B'C') nên nó hoàn-toàn ở trên mặt đó. α là một điểm của đường thẳng B'C' nên α thuộc vào mặt (A'B'C').

Như thế, α là một điểm chung của hai mặt phẳng phân-biệt (ABC) và (A'B'C').

Tương-tự, β và γ cũng là những điểm chung của hai mặt đó.

Ba điểm α, β, γ cùng ở trên giao-tuyến của hai mặt phẳng phân-biệt ; do đó, chúng thẳng hàng với nhau.

2

Đường thẳng song-song

2. 1. ĐỊNH-NGHĨA.

Hai đường thẳng được gọi là song-song khi chúng cùng ở trong một mặt phẳng và không có điểm nào chung.

Nhờ định-nghĩa đó, ta biết rằng hai đường thẳng song-song có thể định được một mặt phẳng. Đó là *cách thứ tư* để định một mặt phẳng ngoài ba cách đã nói ở bài số 1.

2. 2. VỊ-TRÍ TỈ-ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG-GIAN.

Hai đường thẳng *trong không-gian* có thể có một trong những vị-trí tỉ-đối sau :

— Bất-kỳ *(tức là không cùng ở trong một mặt phẳng)*.

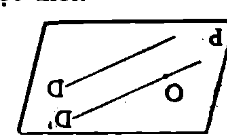
— Cắt nhau — Song-song với nhau — Trùng nhau.

Hai đường thẳng *trong mặt phẳng* có thể : hoặc cắt nhau, hoặc song-song với nhau, hoặc trùng nhau.

2. 3. ĐỊNH-LÝ.

Từ một điểm lấy ở ngoài một đường thẳng, có thể kẻ một đường thẳng song-song với đường đó và chỉ một thôi.

Điểm O và đường thẳng D định được mặt phẳng P. Trong P, từ O ta có thể kẻ một đường thẳng song-song với D và theo định-đề Euclide, ta chỉ kẻ được một thôi.



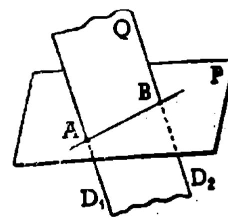
Hình 11

- Trong thực-hành, ta cần nhớ rằng : **O và D ở trong P, nếu từ O, ta kẻ D' song-song với D thì D' hoàn-toàn nằm trong P.**

2. 4. ĐỊNH-LÝ.

Có hai đường thẳng song-song, mặt phẳng nào cắt đường nọ thì cắt cả đường kia.

Giả-sử hai đường thẳng D_1, D_2 song-song với nhau và mặt phẳng P cắt D_1 ở A. Ta phải chứng-minh rằng P cắt D_2. D_1 và D_2 định được một mặt phẳng Q, khác P. P, Q có điểm A chung, nên có giao-tuyến Ax : Ax ở trong P, Ax cũng ở trong Q. Theo một định-lý ở hình học phẳng, ứng-dụng vào mặt phẳng Q, Ax đã cắt D_1 phải cắt cả D_2 tại một điểm B. Đó là điểm chung của D_2 và P.



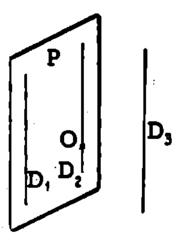
Hình 12

D_2 và P không còn điểm chung nào nữa vì : Nếu D_2 và P còn một điểm chung thứ nhì, thì D_2 nằm trong P. Như thế, P, Q trùng nhau và D_1 cũng nằm trong P, điều đó trái với giả-thiết.

2. 5. ĐỊNH-LÝ.

Hai đường thẳng cùng song-song với một đường thứ ba thì song-song với nhau.

Giả-sử hai đường thẳng D_1 và D_2 cùng song-song với đường thẳng D_3.



Hình 13

a) **Ta hãy chứng-minh rằng D_1 và D_2 cùng ở trên một mặt phẳng.** Ta lấy một điểm O ở trên D_2. Gọi P là mặt định bởi D_1 và O. Nếu P cắt D_2 thì cắt luôn D_3 (2. 4.). Cắt D_3 thì P cắt luôn D_1. P chứa D_1 đồng-thời cắt D_1. Vô-lý ! Vậy P phải chứa D_2.

b) **Ta hãy chứng-minh rằng D_1 và D_2 không có điểm chung.** Nếu D_1 và D_2 có một điểm chung M, thì từ M, ta có thể kẻ hai đường song-song với D_3. Vô-lý (2. 3.). ! Vậy D_1 và D_2 không thể có điểm chung.

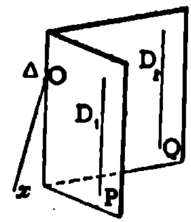
Tóm lại, D_1 và D_2 cùng trong một mặt phẳng và không có điểm chung. Theo định-nghĩa, chúng song-song với nhau.

2. 6. ĐỊNH-LÝ.

Khi hai mặt phẳng tương-giao lần-lượt đựng hai đường thẳng song-song thì giao-tuyến của chúng song-song với hai đường thẳng đó.

Coi hai đường thẳng song-song D_1, D_2.

Giả-sử mặt phẳng P chứa D_1, mặt phẳng Q chứa D_2 ; P và Q cắt nhau theo đường Δ *(h. 14)*.



Hình 14

Ta hãy chứng-minh rằng Δ song-song với D_1 (hoặc D_2),

Lấy một điểm O trên Δ, rồi kẻ Ox song-song với D_1 ; như thế, Ox cũng song-song với D_2 (2. 5.). O ở trên P, Ox song-song với D_1 nên Ox ở trên P. O ở trên Q, Ox song-song với D_2 nên Ox ở trên Q. Do đó Ox là đường thẳng chung cho P và Q. Ox chẳng qua là giao-tuyến Δ vậy.

BÀI TẬP

2. 1. *Cho hai đường thẳng D_1, D_2 và hai đường thẳng bất-kỳ D_3, D_4. Hãy vẽ một đường thẳng gặp cả bốn đường đó.*

2. 2. *Cho hai đường thẳng D_1, D_2 và một điểm O. Có thể nói gì về giao-tuyến của hai mặt phẳng (O, D_1) và (O, D_2) ? Có việc gì xảy ra khi D_1, D_2 đồng-qui hoặc song-song ?*

2. 3. *Có hai đường thẳng D_1, D_2 bất-kỳ, có thể nào vẽ được hai đường thẳng D_3, D_4 song song nhau và dựa vào D_1, D_2 không ?*

2. 4. *Cho một hình tứ-diện ABCD. Theo thứ-tự, gọi trung-điểm của AB, BC, CD DA, AC, BD là M, N, P, Q, R, S.*

1, MNPQ là hình gì ? Đường chéo ra sao ?

2. RQSN là hình gì ? Đường chéo ra sao ?

Kết-luận gì về ba đoạn MP, NQ, RS ?

Phát-biểu một tính-cách của hình tứ-diện.

3

Góc của hai đường thẳng

3. 1. ĐỊNH-LÝ.

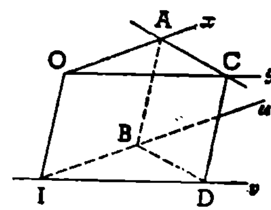
Hai góc có những cạnh song-song cùng chiều thì bằng nhau.

Giả-sử hai góc xOy và uIv có cạnh Ox là Iu song-song cùng chiều, cạnh Oy và It song-song cùng chiều.

Trên Ox, Iu, ta lần-lượt lấy $OA = IB$.

Trên Oy, Iv, ta lần-lượt lấy $OC = ID$.

Tứ-giác OIBA là một hình bình-hành (hai cạnh đối OA, IO song-song và bằng nhau). Suy ra AB song-song và bằng OI ; tương-tự, CD song-song và bằng OI. Suy ra : AB song-song và bằng CD.



Hình 15

Do đó, ABDC là một hình bình-hành và $AC = BD$.

Hai tam-giác OAC, IBD bằng nhau theo trường-hợp thứ ba.

Suy ra $\widehat{xOy} = \widehat{uIv}$.

3. 2. HỆ-LUẬN 1.

Hai góc có những cạnh song-song trái chiều, thì bằng nhau.

3. 3. HỆ-LUẬN 2.

Hai góc có những cạnh song-song, một đôi cùng chiều, một đôi trái chiều thì bù nhau.

3. 4. ĐỊNH-NGHĨA.

1. Góc của hai đường thẳng trong không-gian là một trong bốn góc hợp bởi hai đường thẳng lần-lượt song-song với chúng, phát-xuất từ một điểm không đặc-sắc (Người ta thường chọn góc nhọn).

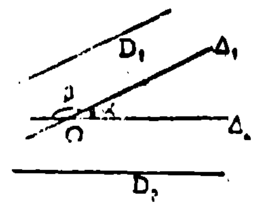
Coi hai đường bất-kỳ D_1, D_2, Lấy một điểm O nào đó rồi từ O kẻ Δ_1, Δ_2 song-song với D_1, D_2 theo thứ-tự (*h. 16*).

Góc α hay góc β gọi là góc của D_1, D_2. Ta thường chọn góc nhọn α.

Nếu O xê-dịch ra chỗ khác, thì trị-số của α không đổi (theo định-lý trên).

2. Hai đường thẳng được gọi là trực-giao khi góc của chúng là góc vuông.

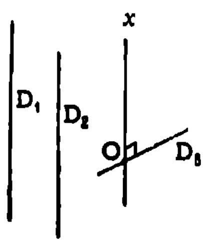
Hai đường thẳng được gọi là thẳng góc khi chúng cắt nhau thành góc vuông.



Hình 16

3. 5. ĐỊNH-LÝ.

Có hai đường thẳng song-song, đường thẳng nào trực-giao với đường thứ nhất thì cũng trực-giao với đường thứ nhì.



Hình 17

Giả-sử D_1 và D_2 song-song và D_3 trực-giao với D_1. Ta phải chứng-minh rằng D_3 trực-giao với D_2. Từ một điểm O lấy trên D_3, ta kẻ Ox song-song với D_1, như thế Ox cũng song-song với D_2 (2. 5.). Vì D_1 và D_3 trực-giao với nhau nên góc D_3Ox là góc vuông. Đó cũng chính là góc của D_2 và D_3.

Vậy D_3 trực-giao với D_2.

BÀI TẬP

3. 1. *Cho một hình tứ-diện ABCD. Gọi M, N, L là trung-điểm của những cạnh BC, AD, AC.*

1. Lấy M làm đỉnh, vẽ góc của MN và AB.

2. Lấy N làm đỉnh, vẽ góc của MN và CD.

3. Chứng-minh rằng điều-kiện ắt có và đủ để cho những góc trên bằng nhau là AB = CD.

4. Muốn cho MLN là một tam-giác vuông góc và cân (đỉnh L) thì cần những điều-kiện gì?

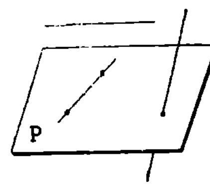
4

Đường thẳng và mặt phẳng song-song

4. 1. ĐỊNH-NGHĨA.

Một đường thẳng được gọi là song-song với một mặt phẳng khi nó không có điểm nào chung với mặt phẳng đó.

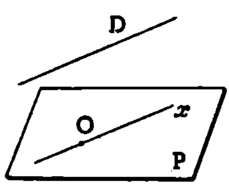
Một mặt phẳng và một đường thẳng có thể có ba vị-trí tỉ-đối sau này : mặt phẳng chứa đường thẳng, cắt đường thẳng hay song-song với đường thẳng (*2. 6.*).



Hình 18

4. 2. ĐỊNH-LÝ THUẬN.

Khi một đường thẳng song-song với một mặt phẳng thì nó song-song với một đường thẳng dựng trong mặt phẳng đó.



Hình 19

Giả-sử đường thẳng D song-song với mặt phẳng P. Ta lấy một điểm O trong P rồi kẻ Ox song-song với D. P và Ox có điểm O chung. Một trong hai điều sau đây phải xảy ra : Hoặc là P cắt Ox ở O, hoặc là P chứa Ox.

Nếu P cắt Ox thì P cắt luôn cả D (*2. 4.*). điều đó trái với giả-thiết.

Chỉ còn một trường-hợp mà ta phải nhận : P chứa Ox. Như thế là D đã song-song với Ox, một đường thẳng ở trong P.

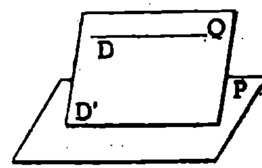
4. 3. CHÚ-Ý.

Có thể nói rằng : khi D song-song với P, nếu từ một điểm O ở trong P, ta kẻ đường Ox song-song với D thì Ox nằm hoàn-toàn trong P.

4. 4. ĐỊNH-LÝ ĐẢO.

Khi một đường thẳng ở ngoài một mặt phẳng và song-song với một đường thẳng đựng trong một mặt phẳng đó thì nó song-song với mặt phẳng đó.

Giả-sử đường D ở ngoài mặt P, và D song-song với một đường D' đựng trong P. D và D' định được một mặt phẳng Q. D' là giao-tuyến của P, Q. Nếu D cắt P thì giao-điểm nằm trên D', như thế nghĩa là D và D' cắt nhau, điều đó trái với giả-thiết.



Hình 20

Vậy D không thể cắt P. Nói khác đi, D song-song với P.

4. 5. CHÚ-Ý.

Có thể nói rằng : **khi D song-song với P, nếu một mặt phẳng chứa D và cắt P theo D' thì D song-song với D'.**

Điều này hay được dùng trong các bài toán.

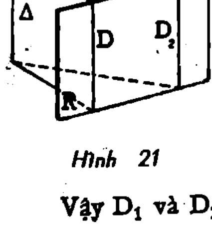
4. 6. PHÁT-BIỂU ĐỘC-NHẤT.

Điều-kiện ắt có và đủ để một đường thẳng song-song với một mặt phẳng là : Đường đó ở ngoài mặt phẳng và song-song với một đường thẳng đựng trong mặt phẳng.

4. 7. ĐỊNH-LÝ.

Khi một mặt phẳng song-song với giao-tuyến của hai mặt phẳng cho sẵn và cắt hai mặt đó thì hai giao-tuyến mới phải song-song với nhau.

Ta coi hai mặt phẳng P, Q mà giao-tuyến là Δ. Giả-sử mặt phẳng R song-song với Δ và cắt P, Q theo đường D_1, D_2. Ta hãy chứng-minh rằng D_1 và D_2 song-song với nhau.



Hình 21

Δ song-song với R ; P chứa Δ và cắt R theo D_1, nên D_1 song-song với Δ (4. 5.).

Tương-tự, D_2 song-song với Δ.

Vậy D_1 và D_2 song-song với nhau vì cùng song-song với Δ (2. 5.).

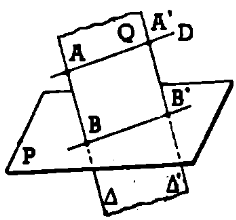
4. 8. ĐỊNH-LÝ.

Một đường thẳng và một mặt phẳng song-song chắn trên hai cát-tuyến song-song những đoạn bằng nhau.

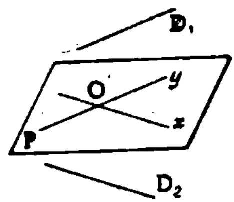
Giả-sử đường D song-song với mặt P (*h. 22*) ; và Δ song-song với Δ'. Giả-sử D, P cắt Δ ở A, B ; và D, P cắt Δ' ở A', B'. Ta hãy chứng-minh AB = A'B'.

Δ và Δ' định được một mặt phẳng Q. Giao-tuyến của Q và P là BB'. Ta có AA' song-song với BB' (4. 5.).

Tứ-giác ABB'A' là một hình bình-hành, vì có các cạnh đối song-song đôi một. Do đó AB = A'B'.



Hình 22



Hình 23

4. 9. ĐỊNH-LÝ.

Từ một điểm, ta có thể vẽ được một mặt phẳng song-song với hai đường bất-kỳ và chỉ một thôi.

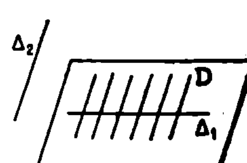
Ta coi hai đường bất-kỳ D_1, D_2 và một điểm O.

Từ O (*h. 23*), ta kẻ Oy song-song với D_1 và kẻ Ox song-song với D_2. Ox, Oy định được một mặt phẳng độc-nhất P.

P chứa Oy nên song-song với D_1 ; P chứa Ox nên song-song với D_2 (4. 4.).

4. 10. MỘT CÁCH PHÁT-SINH MẶT PHẲNG.

Khi một đường thẳng D dựa vào một đường Δ_1 và song-song với một đường Δ_2 (Δ_1 không song-song với Δ_2) thì D phát-sinh ra một mặt phẳng. Đó là mặt phẳng chứa Δ_1 và song-song với Δ_2 *(Xem lại đoạn số 1.9, và 1.10.).*



Hình 24

BÀI TẬP

4. 1. *Có hai mặt phẳng cắt nhau P, Q và một điểm O. Hãy vẽ một đường thẳng đi qua O và song-song với cả P lẫn Q.*

4. 2. *Cho hai mặt phẳng P, Q, giao-tuyến là Δ. Một mặt phẳng lưu-động. R cắt P và Q theo D_1, D_2.*

1. *Nếu R song-song với Δ thì D_1, D_2 ra sao?*
2. *Nếu D_1 song-song với D_2 thì D_1 có song-song với Δ không?*
3. *Nếu D_1 song-song với Δ thì D_1 có song-song với D_2 không?*

4. 3. *Cho hai mặt phẳng cắt nhau P, Q, và hai đường thẳng bất-kỳ D_1, D_2.*

1. Hãy vẽ một đường thẳng dựa vào D_1 và song-song với cả P lẫn Q ; có bao nhiêu đường như thế?

2. Hãy vẽ một đường thẳng dựa vào D_2 và song-song với cả P lẫn Q ; có bao nhiêu đường như thế?

3. Hãy vẽ một đường thẳng dựa vào D_1, D_2 và song-song với P, Q.

4. 4. *Cho hai nửa đường thẳng bất kỳ Ax, By.*

1. Qua B, ta vẽ đường Bx′ song-song với Ax. Định vị-trí của Ax đối với mặt phẳng x′By (mà ta gọi là P).

2. Một điểm M lưu-động trên Ax. Một điểm N lưu-động trên By. Đường song-song với AB kẻ từ M cắt P ở M′. Quỹ-tích của M′. Chứng-tỏ M′N song-song với một phương cố-định khi AM = BN.

3. Vẫn cho AM = BN, tìm quỹ-tích trung-điểm của M′N và trung-điểm của MN.

4. 5. *Cho một hình tứ-diện ABCD. Cắt nó bằng một mặt phẳng song-song với hai cạnh đối AB và CD. Chứng-tỏ rằng thiết-diện là một hình bình-hành. Thiết-diện đó có thể là hình chữ-nhật được không?*

4. 6. *Cho một hình tứ-diện ABCD, trong đó AB trực-giao với CD. Cho biết AB = CD = AC = a. Lấy một điểm M trên AC. Đặt AM = x. Từ M, vẽ một mặt phẳng P song-song với AB và CD. P cắt tứ-diện theo hình gì? Tính diện-tích S của thiết-diện theo a và x. (Tính x để cho $S = m^2$ (m là một đoạn cho sẵn).*

TOÁN

Hai đường thẳng bất-kỳ D và D' cắt một mặt phẳng P tại A, A' theo thứ-tự. Gọi Δ là một đường thẳng lưu-động song-song với P, cắt D và D' ở M, M' theo thứ-tự.

1. Chứng-minh rằng giao-tuyến của mặt phẳng P với hai mặt phẳng (D, △) và (D', △) là hai đường song-song.

2. Từ M, người ta kẻ đường song-song với D'. Nó cắt P ở N. Tìm quỹ-tích của đường thẳng MN. Tìm quỹ-tích của điểm N.

3. Định △ để cho đoạn MM' ngắn nhất. Định △ để cho đoạn MM' có độ dài d cho sẵn.

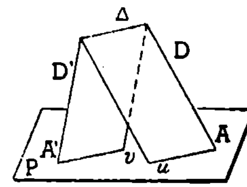
BÀI GIẢI

1. Giao-tuyến của mặt phẳng P với hai mặt phẳng (D, △) và (D', △).

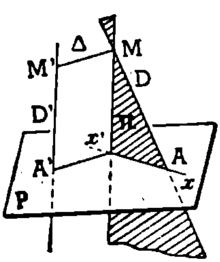
Hai mặt phẳng (D, △) và P có một điểm chung A ; vì thế, chúng có giao-tiếp A*u*.

Mặt (D, △) chứa △, thế mà △ song-song với P theo giả-thiết, cho nên giao-tuyến của mặt (D, △) với P song-song với △.

Vậy A*u* song-song với △.



Hình 25



Hình 17

Chứng-mihh tương-tự, ta biết rằng giao-tuyến A'*v* của hai mặt (D', △) và P song-song với △.

A*u* và A'*v* cùng song-song với △, nên chúng song-song với nhau.

Chú-ý. Có thể nói rằng: **P song-song với giao-tuyến △ của hai mặt (D, △) và (D', △) và P cắt hai mặt đó, nên giao-tuyến Au, A'v song-song với nhau.**

2. Quỹ-tích của đường thẳng MN.

Đường thẳng MN dựa vào đường thẳng cố-định D và lúc nào cũng song-song với D' (ta nói rằng phương của MN không đổi). Vậy MN gây nên mặt phẳng π : đó là mặt phẳng chứa D và song-song với D'.

Quỹ-tích của N.

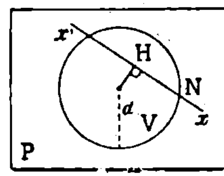
N là điểm chung của hai mặt phẳng P và π : N nằm trên giao-tuyến *x*'A*x* của hai mặt P và π đó. Khi M vạch nên cả đường D thì N vạch nên cả đường *x*'A*x* : đó là quỹ-tích của N.

3. Cách định đường △ để cho M'M ngắn nhất.

Vì ta luôn luôn có MM' = A'N nên *điều-kiện ắt có và đủ* để cho MM' ngắn nhất là A'N ngắn nhất.

Ta hạ A'H thẳng góc với $x'Ax$. A'H là vị-trí của A'N ứng với trị-số cực-tiểu của A'N.

Có N, ta tìm ra M bằng cách vẽ từ N đường song-song với D' : giao-điểm của D với đường mới kẻ đó là M. Biết M, ta suy ra M' bằng cách vẽ đường song-song với NA' : giao-điểm của D' với đường mới kẻ đó là M'. M'M là đường △ phải tìm.



Hình 27

Cách định đường △ để cho MM' = d. Ta hãy vẽ N sao cho A'N = *d*. Muốn thế, trong mặt P, ta vẽ vòng tròn V tâm A', bán-kính *d*. Giao-điểm của V và $x'Ax$ là điểm N phải tìm. Có N, ta suy ra M và M' như đã nói ở trên.

Nếu $d >$ A'H, bài toán có hai lời giải.

Nếu $d =$ A'H, N ở H, bài toán có một lời giải.

Nếu $d >$ A'H, bài toán vô-nghiệm.

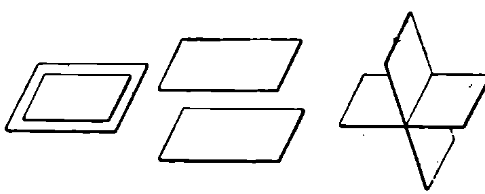
5

Mặt phẳng song-song

5. 1. ĐỊNH-NGHĨA.

Hai mặt phẳng được gọi là song-song khi chúng không có điểm nào chung.

Hai mặt phẳng có thể có ba vị-trí tỉ-đối sau này: trùng nhau, hoặc song-song với nhau, hoặc cắt nhau (*h. 29*).

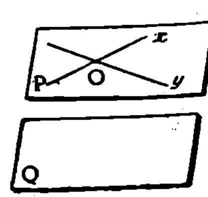


Hình 29

5. 2. ĐỊNH-LÝ THUẬN.

Nếu hai mặt phẳng song-song với nhau thì mặt nọ chứa hai đường thẳng đồng-qui, song-song với mặt kia.

Giả-sử hai mặt phẳng P, Q song-song với nhau. Trong P, kẻ hai đường đồng-qui O*x*, O*y*. Nếu O*x* cắt Q thì điểm chung đó vừa ở trong P, vừa ở trong Q. Như thế là P, Q cắt nhau, điều đó trái với giả-thiết! Vậy O*x* không thể cắt Q. Nói khác đi, nó song-song với Q. Tương-tự, O*y* song-song với Q.



Hình 30

5. 3. CHÚ Ý.

Ta cũng nói được rằng: «**khi hai mặt phẳng song-song với nhau thì mặt phẳng nọ chứa hai đường thẳng đồng-qui, song-song với hai đường thẳng đồng-qui của mặt kia**».

5. 4. ĐỊNH-LÝ ĐẢO.

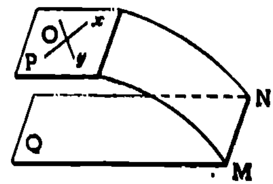
Có hai mặt phẳng, nếu một mặt chứa hai đường thẳng đồng-qui song-song với mặt kia thì hai mặt phẳng đó song-song với nhau.

Giả-sử P chứa hai đường đồng-qui Ox, Oy cùng song-song với Q. Ta phải chứng-minh rằng P, Q không có điểm chung.

Giả-sử P cắt Q theo giao-tuyến MN. P chứa Ox và cắt Q theo MN. Suy ra Ox song-song với MN (4. 5.).

P chứa Oy và cắt Q theo MN. Suy ra Oy song-song với MN (4. 5.).

Như thế là từ *một* điểm O, ta kẻ được *hai* đường song-song với MN. Vô-lý ! (2.3.).



Hình 21

Vậy P, Q không thể có một giao-tuyến MN. Nói khác đi, chúng song-song với nhau.

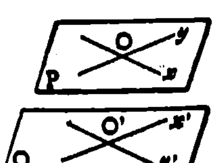
5. 5. PHÁT-BIỂU ĐỘC-NHẤT.

Điều-kiện ắt có và đủ để hai mặt phẳng song-song với nhau là : mặt nọ chứa hai đường thẳng đồng-qui song-song với mặt kia.

5. 6. ĐỊNH-LÝ.

Từ một điểm ở ngoài một mặt phẳng, người ta có thể vẽ một mặt phẳng song-song với mặt đó và chỉ một thôi.

Coi điểm O ở ngoài mặt phẳng Q. Muốn có mặt P qua O và song-song với Q thì ta vẽ O'x' và O'y' ở trong Q ; rồi kẻ Ox, Oy song-song với O'x', O'y' theo thứ-tự. Ox, Oy định được một mặt P. P song-song với Q theo định-lý đảo ở trên.



Hình 32

Ngoài P ra, không còn mặt phẳng nào khác đi qua O và song-song với Q. Thật vậy, *giả-sử có một mặt phẳng P' khác P cũng đi qua O và cũng song-song với Q*. Nếu P' không chứa Ox thì nó phải cắt Ox. Do đó, nó cắt luôn O'x' tức là cắt Q (2. 4.) điều này trái với giả-thiết.

Vậy bắt buộc P' phải chứa Ox. Tương-tự, P chứa Oy.

P' chứa cả Ox lẫn Oy, như thế là nó trùng với P. Nói khác đi, P là mặt phẳng độc-nhất đi qua O và song-song với Q.

5. 7. ĐỊNH-LÝ.

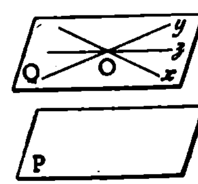
Quỹ-tích những đường thẳng phát-xuất từ một điểm O và song-song với một mặt phẳng P là mặt phẳng Q đi qua O và song-song với P.

1. Tất cả những đường thẳng phát-xuất từ O và song-song với P đều ở trong Q.

Gọi Ox, Oy là hai đường song-song với P. Chúng định được một mặt phẳng đi qua O và song-song với P. Vì lẽ rằng qua O chỉ có một mặt phẳng song-song với P, nên mặt phẳng xOy đó chính là mặt phẳng Q. Nói khác đi, Ox, Oy nằm trong Q.

2. Bất cứ đường Oz nào ở trong Q cũng song-song với P.

Hai mặt phẳng P, Q đã song-song rồi, chúng không có điểm nào chung. Oz ở trong Q, vậy Oz không cắt P mà cũng không nằm trong P, nên Oz song-song với P.



Hình 33

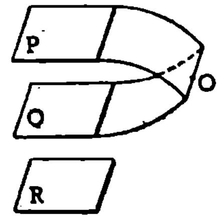
5. 8. MỘT CÁCH PHÁT-SINH MẶT PHẲNG.

Coi một điểm cố-định O ở ngoài một mặt phẳng cố-định P. Nếu một đường thẳng lưu-động nhưng luôn luôn qua O và song-song với P thì nó phát-sinh ra một mặt phẳng; đó là mặt Q qua O và song-song với P. *(Coi lại đoạn 1.9., 1.10. và 4.10.).*

5. 9. ĐỊNH-LÝ.

Nếu hai mặt phẳng cùng song-song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song-song với nhau.

Giả-sử hai mặt phẳng P, Q cùng song-song với R. Nếu P, Q có một điểm chung O thì từ O, đã có những hai mặt phẳng P, Q khác nhau và song-song với R. Điều này trái với định-lý trên (5. 6.). Vậy P, Q không thể có điểm nào chung được. Nói khác đi, chúng song-song với nhau.

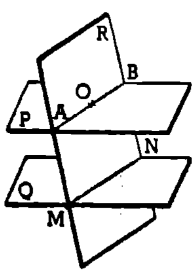


Hình 34

5. 10. ĐỊNH-LÝ.

Có hai mặt phẳng song-song, mặt nào cắt một thì cắt cả hai và hai giao-tuyến song-song với nhau.

a) Giả-sử hai mặt phẳng P, Q song-song với nhau và mặt phẳng R cắt P theo AB ; ta hãy chứng-minh rằng R cắt Q.



Hình 35

Trên AB, ta lấy một điểm O. Nếu R không cắt Q thì R song-song với Q. Như thế là từ một điểm O, ta có thể vẽ được *hai* mặt phẳng khác nhau cùng song-song với Q, Vô-lý (5. 6.).

Vậy R và Q không thể song-song với nhau được. Chúng phải cắt nhau. Ta gọi giao-tuyến là MN.

b) Bây giờ ta chứng-minh AB song-song với MN, AB và MN cùng ở trong R và lần-lượt ở trong P, Q (hai mặt song-song) nên không có điểm nào chung, vì nếu chúng có điểm chung thì P và Q có điểm chung, trái giả-thiết ! Như thế, theo định-nghĩa, AB và MN song-song với nhau (cùng ở trong R và không có điểm nào chung).

BÀI TẬP

5. 1. *Cho một điểm O, một đường thẳng D và một mặt phẳng P. Hãy vẽ một đường thẳng đi qua O, dựa và D và song-song với P.*

5. 2. *Cho hai mặt phẳng song-song P, Q. Trong P, có một tam-giác ABC. Trong Q, có một tam-giác DEF.*

1. *Vẽ giao-tuyến của hai mặt phẳng P, ADF và của hai mặt phẳng Q, BCE.*

2. *Vẽ giao-tuyến của hai mặt phẳng ADF, BCE.*

5. 3. *Cho một hình tứ-diện OABC trong đó OA = OB = OC. Vẽ đường phân-giác ngoài của những góc AOB, BOC, COA. Chứng-minh rằng ba đường đó cùng ở trong một mặt phẳng.*

5. 4. *Cho ba nửa đường thẳng song-song cùng chiều Ax, By, Cz không cùng ở trong một mặt phẳng. Trên Ax, lấy điểm M ; trên By, lấy điểm N ; trên Cz, lấy điểm P sao cho AM = BN = CP.*

1. *Chứng-tỏ rằng mặt phẳng (MNP) song-song với một mặt phẳng cố-định.*

2. *Tìm quỹ-tích của trung-điểm các cạnh và của trọng-tâm tam-giác MNP.*

5. 5. *Hai hình vuông ABCD. ABEF có cạnh AB chung và không cùng ở trong một mặt phẳng.*

1. *Có thể nói gì về hai mặt phẳng DAF và CBE?*

2. *Trên đoạn BD, lấy điểm M sao cho* $\frac{BM}{BD} = \frac{1}{3}$. *Trên đoạn AE, lấy điểm N sao cho* $\frac{EN}{EA} = \frac{2}{3}$. *Những đường song-song với AB, kẻ từ M, N, lần-lượt cắt AD, AF tại M', N'. So-sánh M', N' với FD về độ dài và phương hướng. Chứng-minh rằng MN song-song với mặt phẳng DFEC.*

TOÁN

Cho hai nửa đường thẳng bất-kỳ cố-định Ax, By. Một đường thẳng D lưu-động cắt Ax, By ở M, N.

1. Làm thế nào vẽ được một mặt phẳng P chứa By và song-song với Ax? Từ M, kẻ đường song-song với AB, nó cắt P ở M'. Tìm quỹ-tích của M'.

2. Gọi I, J là trung-điểm của MN, M'N. So-sánh hai vectơ $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{AB}$.

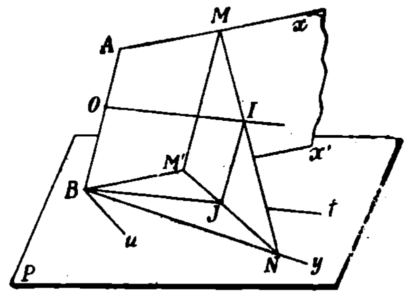
3. Tìm quỹ-tích của I và của J khi AM = BN.

4. Chứng-tỏ rằng mặt phẳng MM'N song-song với một mặt phẳng cố-định (vẫn giả-sử AM = BN).

BÀI GIẢI

1. Cách vẽ mặt phẳng P chứa By và song-song với Ax.

Từ một điểm ở trên By — thí-dụ là điểm B — ta vẽ Bx' song-song với Ax. By và Bx' định được mặt phẳng P. Ax song-song với P vì nó song-song với một đường thẳng nằm trong P.



Hình 36

Quỹ-tích của M′.

Ax và Bx' song-song với nhau, chúng định được một mặt phẳng Q. Giao-tuyến của P và Q là Bx'.

Đường song-song với AB, kẻ từ M, nằm hoàn-toàn trong Q. Khi đường đó cắt P ở M' thì M' nằm trên giao-tuyến Bx' của P và Q.

Khi M vạch nên nửa đường thẳng Ax thì M' vạch nên nửa đường thẳng Bx', song-song cùng chiều với Ax. Bx' là quỹ-tích của M'.

2. Việc so-sánh hai vectơ $\overrightarrow{IJ}$ và $\overrightarrow{AB}$.

Trong tam-giác MM'N, I và J là trung-điểm của hai cạnh NM' và NM. Vì thế, ta

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{2}$$

Tứ-giác AMM'B là một hình bình-hành vì nó có các cạnh song-song đôi một. Do đó, ta có

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$$

Vậy thì $$\overrightarrow{IJ} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$$

Nếu ta gọi O là trung-điểm của AB thì ta có

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{IJ}$$

Điều đó tỏ rằng BJIO là một hình bình-hành.

3. Quỹ-tích của J khi AM = BN.

Khi AM = BN thì AM = BM'. Tam-giác BM'N là một tam-giác cân mà đáy là M'N. Quỹ-tích của J — trung-điểm cạnh đáy M'N — là nửa đường thẳng Bt, phân-giác trong của góc cố-định yBx'.

Quỹ-tích của I. Ta đã biết BJIO là một hình bình-hành. Hai điểm O, B cố-định. Khi J vạch nên nửa đường thẳng Bt thì I vạch nên nửa đường thẳng Oz song-song cùng chiều với Bt.

(Căn-cứ vào hệ-thức $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{BO}$, ta có thể nói rằng Oz là hình tịnh-tiến của Bt, trong phép tịnh-tiến theo vectơ cố-định $\overrightarrow{BO}$).

4. Phương của mặt phẳng (MM'N).

Trong tam-giác cân M'BN (đỉnh là B), đáy M'N lưu-động nhưng bao giờ cũng song-song với phân-giác ngoài Bu của góc $x'By$. Góc $x'By$ cố-định nên Bu cũng cố-định.

Coi hai mặt phẳng ABu và MM'N. Ta biết AB song-song với MM' và Bu song-song với M'N.

Vậy mặt cố-định ABu song-song với mặt MM'N vì mặt thứ nhất, chứa hai đường thẳng đồng-qui song-song với mặt thứ nhì.

TOÁN

Cho một tứ-giác phẳng ABCD. Hai cạnh AB, CD cắt nhau tại E. Hai cạnh AD, BC cắt nhau tại F. Gọi S là một điểm ở ngoài mặt phẳng của tứ-giác. Một mặt phẳng P cắt các đường thẳng SA, SB, SC, SD tại I, J, K, L theo thứ-tự.

1. Chứng-minh rằng : «Điều-kiện ắt có và đủ để cho IJ song-song với KL là : P song-song với SE».

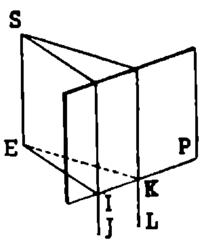
Tìm điều-kiện ắt có và đủ để cho IL song-song với JK.

2. Chứng-tỏ rằng có vô-số mặt phẳng P làm cho tứ-giác IJKL thành một hình bình-hành.

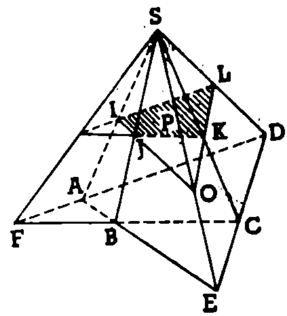
BÀI GIẢI

1. Điều-kiện ắt có và đủ để cho IJ song-song với KL.

Ta coi hai mặt phẳng SAB và SCD. Chúng có hai điểm chung là S và E, cho nên giao-tuyến của chúng là SE, P cắt hai mặt phẳng SAE, SDE theo giao-tuyến IJ và KL.



Hình 37



Hình 38

a) Nếu P song-song với SE thì hai đường IJ và KL song-song với nhau.

b) Đảo lại, giả-sử IJ và KL song-song với nhau, ta hãy chứng-minh rằng P song-song với SE.

Hai mặt phẳng SDE, SAE lần-lượt chứa hai đường song-song IJ và KL, và cắt nhau theo đường SE nên SE song-song với IJ, KL.

SE song-song với IJ, một đường nằm trong P nên SE song-song với P.

Kết-luận : « điều-kiện ắt có và đủ để cho IJ song-song với KL là : P song-song với SE ». Chứng-minh tương-tự ta biết rằng : *« điều-kiện ắt có và đủ* để cho IL song-song với JK là : P song-song với SF ».

2. Những mặt phẳng P ứng với những bình-hành IJKL.

Điều-kiện ắt có và đủ cho tứ-giác IJKL trở thành hình bình-hành là : IJ song-song với KL *và* IL song-song với JK.

Như thế, P phải song-song với SE và SF. Nói khác đi, P phải song-song với mặt phẳng SFE. Ta tìm được vô-số mặt phẳng P song-song với mặt SFE, nghĩa là ta có vô-số mặt phẳng P làm cho tứ-giác IJKL trở thành một hình bình-hành.

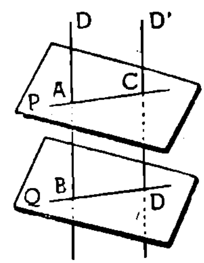
6

Tính-chất lượng* của những mặt phẳng song-song

6. 1. ĐỊNH-LÝ.

Hai mặt phẳng song-song chắn trên hai cát-tuyến song-song những đoạn bằng nhau.

Coi hai mặt phẳng song-song P, Q và hai đường thẳng song-song D, D'. Giả-sử D cắt P, Q lần-lượt ở A, B và D' cắt P, Q lần-lượt ở C, D.

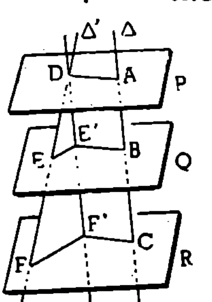


Hình 39

Ta phải chứng-minh rằng AB = CD *(h. 39)*. D và D' định được mặt phẳng R; R cắt P, Q lần-lượt theo hai giao-tuyến AC, BD; AC song-song với BD (5. 10).

Xét tứ-giác ABDC. Nó có AB song-song với DC theo giả-thiết, và AC song-song với BD. Vậy ABDC là một hình bình-hành. Suy ra: AB = CD.

6. 2. ĐỊNH-LÝ THUẬN.



Hình 40

Nhiều mặt phẳng song-song định trên hai cát-tuyến những đoạn tương-ứng tỉ-lệ.

Hai cát-tuyến Δ' và Δ" cắt ba mặt phẳng song-song P, Q, R tại ABC, DEF *(h. 40)*.

Ta phải chứng-minh rằng $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$

Từ D, kẻ Δ" song-song với Δ, Δ" cắt hai mặt Q, R ở E', F'.

Ta có AB = DE' và BC = E'F' theo định-lý trên.

---

* *Tính-chất lượng là tính-chất nói về độ dài.*

Hai đường thẳng Δ'' và Δ' định được một mặt phẳng S. Giao-tuyến của S với hai mặt phẳng song-song Q, R là EE' và FF'. Trong tam-giác DFF', EE' và FF' song-song với nhau (5. 10.) Định-lý Thalès cho ta :

$$\frac{DE'}{DE} = \frac{E'F'}{EF}$$

Do đó :

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

Nếu Δ, Δ' được định-hướng thì ta viết

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

Định-lý trên đây được gọi là **định-lý Thalès trong không-gian.**

6. 3. ĐỊNH-LÝ ĐẢO.

Nếu nhiều đường thẳng dựa trên hai cát-tuyến và định trên đó những đoạn tương-ứng tỉ-lệ thì chúng ta cùng song-song với một mặt phẳng.

Ba đường thẳng AD, BE, CF dựa trên hai cát-tuyến Δ và Δ' (*h. 41.*) Giả-sử ta có :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$$

Ta hãy chứng-minh rằng AD, BE, CF cùng song-song với một mặt phẳng.

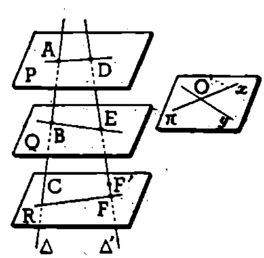
Lấy một điểm O không đặc-sắc. Kẻ Ox song-song với AD, và Oy song-song với BE. AD và BE cùng song-song với mặt π định bởi Ox, Oy. Ta hãy chứng-minh rằng CF cũng song-song với mặt phẳng π đó.

Xét mặt P chứa AD và song-song với π ; mặt Q chứa BE và song-song với π ; mặt R chứa C và song-song với π. R cắt Δ' ở F' ; theo định-lý thuận ta có : $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF'}}$.

So-sánh với giả-thiết thì nó $\overline{EF} = \overline{EF'}$; do đó, F' thùng với F.

Vì CF' song-song với π nên CF song-song với π.

Tóm lại, AD, BE, CF cùng song-song với mặt phẳng π.



Hình 41

BÀI TẬP

6. 1. Cho một điểm O ở ngoài một mặt phẳng P. Nối O với một điểm M lưu-động ở trong P.

1. Tìm quỹ-tích trung-điểm của đoạn OM.

2. Tìm quỹ-tích của điểm chia đoạn OM theo một tỉ-số cho sẵn k.

6. 2. Cho hai mặt phẳng song-song P và Q. M là một điểm lưu-động ở trong P; N là một điểm lưu-động ở trong Q. Tìm quỹ-tích của điểm chia đoạn MN theo tỉ-số cho sẵn k.

6. 3. Cho ba nửa đường thẳng Ox, Oy. Oz không cùng ở trong một mặt phẳng. Một mặt phẳng cố-định P cắt chúng ở A, B, C. Một mặt phẳng lưu-động Q cắt chúng ở A′, B′. C′. Giả-sử Q song-song với P.

1. Chứng-tỏ rằng hai tam-giác ABC và A′B′C′ đồng-dạng với nhau.

2. Tìm quỹ-tích trung-điểm các cạnh và quỹ-tích trọng-tâm của tam-giác A′B′C′ khi Q lưu-động mà vẫn song-song với P.

6. 4. Bốn mặt phẳng khác nhau P, Q, R, S cùng chứa một đường thẳng Δ. Hai đường thẳng song-song D_1, D_2 cắt bốn mặt đó ở A, B, C, D và A′, B′ C′, D′. Giả-sử ABCD là một hàng điểm điều-hòa. Chứng-tỏ rằng A′B′C′D′ cũng là một hàng điểm điều-hòa.

TOÁN

Hai đường thẳng bất-kỳ D_1, D_2 cố-định cắt mặt phẳng cố-định P tại A và B. Gọi O là điểm ở trên AB và chia AB theo tỉ-số đại-số k $\left(\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = k\right)$. Một đường thẳng Δ lưu-động, nó song-song với P và cắt D_1, D_2 ở M, N theo thứ-tự. Gọi I là điểm chia đoạn MN theo tỉ-số đại-số k $\left(\frac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = k\right)$.

1. Có thể nói gì về ba đường AM, OI, BN? Suy ra rằng I nằm trên một mặt phẳng cố-định π. Làm thế nào định rõ được π?

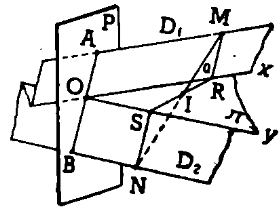
2. Chứng-tỏ rằng I lưu-động ở trên một đường thẳng cố-định dựng trong π.

BÀI GIẢI

1. Nhận-xét về ba đường AM, OI, BN.

Ta coi ba đường thẳng AM, OI, BN và hai cát-tuyến AOB, MIN. Theo giả thiết, ta có :

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = k$$



Hình 42

Theo định-lý đảo của định-lý Thalès trong không-gian ta biết : AM, OI, BN cùng song-song với một mặt phẳng. Ta hãy tìm cách định mặt phẳng đó.

Từ O, ta vẽ hai đường O*x*, O*y* song-song với D_1, D_2 theo thứ-tự. Mặt phẳng *x*O*y* là mặt phẳng song-song với cả hai đường D_1 và D_2. Như thế, đường OI cũng phải song-song với mặt *x*O*y*, nhưng OI lại có điểm O nằm trong mặt đó, vậy OI hoàn-toàn nằm trong mặt *x*O*y*.

Điểm O và hai đường D_1, D_2 đều cố-định, nên O*x*, O*y* cũng cố-định. Do đó, mặt phẳng *x*O*y* cũng cố-định. Đó chính là mặt phẳng π mà ta phải tìm.

Tóm lại, I nằm trong mặt phẳng cố-định π (π đi qua O và song-song với D_1, D_2).

2. Đường cố-định trên đó có điểm I.

Ta kẻ NS song-song với BO, và MR song-song với AO.

Hai đường NS và MR cùng song-song với AB nên song-song với nhau, chúng định được một mặt phẳng Q. Mặt Q chứa NS và NM, thế mà NS và NM song-song với P, nên mặt Q song-song với mặt P (mặt thứ nhất chứa hai đường đồng-qui song-song với mặt thứ nhì).

MN cắt SR tại điểm I'.

Coi hai tam-giác I'MR và I'NS. Chúng là hai tam-giác đồng-dạng (trường-hợp 1) Ta suy ra :

$$\frac{\overline{I'M}}{\overline{I'N}} = \frac{\overline{MR}}{\overline{NS}} = \frac{\overline{AO}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = k$$

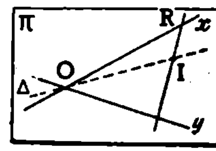
Thế mà $\dfrac{\overline{IM}}{\overline{IN}} = k$

Vậy I' trùng với I.

Cũng nhờ hai tam-giác đồng-dạng nói trên, ta biết rằng: $\dfrac{\overline{IR}}{\overline{IS}} = k$

Khi mặt Q lưu-động mà vẫn song-song với P, thì nó cắt mặt π theo những giao-tuyến RS song-song với nhau (RS lúc nào cũng song-song với giao-tuyến của P và π).

Vì $\dfrac{\overline{IR}}{\overline{IS}} = k$, nên I nằm trên một đường thẳng Δ đi qua O (định-lý về Hình học phẳng).



Hình 43

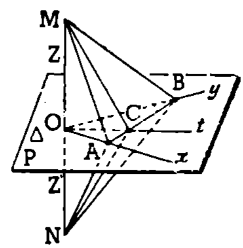
7

Đường thẳng và mặt phẳng thẳng góc

7. 1. ĐỊNH-LÝ MỞ ĐẦU.

Khi một đường thẳng thẳng góc với hai đường thẳng đồng-qui của một mặt phẳng thì nó thẳng góc với mọi đường thẳng dựng trong mặt phẳng đó và đi qua chân nó.

Giả-sử $z'Oz$ thẳng góc với hai đường thẳng đồng-qui Ox, Oy của mặt phẳng P. Gọi Ot là một đường bất-kỳ nằm trong P. Ta hãy chứng-minh $\widehat{zOt} = 90^o$.



Hình 44

Oz không nằm trong P được, vì nếu nó ở trong P thì tại O có những hai đường Ox Oy thẳng góc với Oz. Điều đó không thể có được ở trong Hình-học phẳng. Bó buộc Oz phải cắt P.

Ta kẻ một cát-tuyến cắt Ox, Oy, Ot tại A, B, C. Trên $z'z$, ta thấy $OM = ON$.

Trong tam-giác MBN, BO vừa là trung-tuyến vừa là đường cao. Vậy nó là một tam-giác cân, đỉnh là B, và $BM = BN$; tương-tự, MAN là một tam-giác cân và $AM = AN$. Hai tam-giác MAB và NAB bằng nhau theo trường-hợp thứ ba. Lấy AB làm bản-lề, quay tam-giác MAB cho trùng với NAB thì M tới trùng với N. Do đó $CM = CN$.

Tam-giác CMN có hai cạnh bằng nhau là một tam-giác cân, OC đã là trung-tuyến phát-xuất từ đỉnh O, vậy nó cũng là đường cao. Suy ra $\widehat{zOt} = 90^o$, tức là $z'Oz$ thẳng góc với Ot.

7. 2. ĐỊNH-NGHĨA.

Một đường thẳng được gọi là thẳng góc với một mặt phẳng khi nó trực-giao với mọi đường thẳng dựng trong mặt phẳng đó.

7. 3. ĐỊNH-LÝ THUẬN.

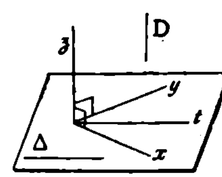
Khi một đường thẳng thẳng góc với một mặt phẳng thì nó trực giao với hai đường thẳng đồng-qui của mặt đó.

Khi đường thẳng $z'z$ thẳng góc với một mặt phẳng P thì, theo định-nghĩa, nó trực-giao với mọi đường thẳng ở trong P, trong số đó ta có thể kẻ hai đường thẳng đồng-qui Ox, Oy.

7. 4. ĐỊNH-LÝ ĐẢO.

Khi một đường thẳng trực-giao với hai đường đồng-qui của một mặt phẳng thì nó trực-giao với mọi đường thẳng của mặt đó (nghĩa là nó thẳng góc với mặt đó).

Giả-sử D trực-giao với hai đường đồng-qui Ox, Oy của mặt P. Gọi Δ là một đường thẳng bất-kỳ của P. Ta hãy chứng-minh rằng D trực-giao với Δ.



Hình 45

Từ O, ta kẻ Oz song-song với D, và Ot song-song với Δ. Để chứng-minh D trực-giao với Δ, ta chỉ việc chứng-minh Oz thẳng góc với Ot.

D trực-giao với Oz, Oy. Thế mà Oz song-song với D. Vậy Oz thẳng góc với Ox, Oy.

Theo định-lý mở đầu, Oz thẳng góc với Ot. Suy ra D trực-giao với Δ.

7. 5. PHÁT-BIỂU ĐỘC-NHẤT.

Điều-kiện ắt có và đủ để cho một đường thẳng thẳng góc với một mặt phẳng là : nó trực-giao với hai đường thẳng đồng-qui của mặt đó.

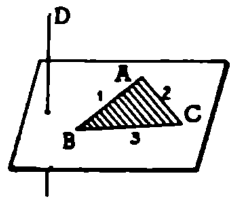
7. 6. HỆ-LUẬN 1.

Khi một đường thẳng trực-giao với hai cạnh của một tam-giác thì nó trực-giao với cạnh thứ ba *(h. 46).*

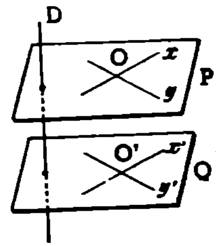
7. 7. HỆ-LUẬN 2.

Có hai mặt phẳng song-song, đường thẳng nào thẳng góc với một thì thẳng góc với cả hai.

Giả-sử mặt P song-song với mặt Q, và D thẳng góc với P. Vì P song-song với Q, nên trong P có hai đường đồng-qui Ox, Oy lần-lượt song-song với hai đường đồng-qui O'x', O'y' của Q. D thẳng góc với P, nên D trực-giao với Ox. Oy (7. 3.). Suy ra, D trực-giao với O'x', O'y'. Theo định-lý đảo trên (7. 4.) thì D thẳng góc với Q.



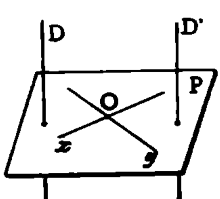
Hình 46



Hình 47

7. 8. HỆ-LUẬN 3.

Có hai đường thẳng song-song ; mặt phẳng nào thẳng góc với một thì thẳng góc với cả hai.



Hình 49

Giả-sử D, D' song-song với nhau và D thẳng góc với P. Như thế, D trực-giao với hai đường đồng-qui Ox, Oy của P.

Vì D' song-song với D nên D' cũng trực-giao với hai đường thẳng đồng-qui Ox, Oy của P. Do đó, D' thẳng góc với P (7. 4.).

(Độc-giả có thể học ngay ở đây định-lý ba đường thẳng góc ở cuối bài số 9).

BÀI TẬP

7. 1. *Hai đường thẳng D_1, D_2 cùng ở trong một mặt phẳng P và cùng trực-giao với một đường thẳng D. Biết rằng D không thẳng góc với P, chứng-minh rằng D_1 và D_2 song-song với nhau.*

7. 2. *Cho một mặt phẳng P. Trong mặt đó, kẻ hai đường thẳng đồng-qui Ox, Oy. Gọi Q là một mặt phẳng thẳng góc với Ox. Gọi R là một mặt phẳng thẳng góc với Oy. Chứng-minh rằng Q và R phải cắt nhau, và giao-tuyến của chúng thẳng góc với P.*

7. 3. Trong một mặt phẳng P, vẽ một vòng tròn đường kính AB. Trên đường thẳng góc với P kẻ từ A, lấy một điểm S. Trên vòng tròn, lấy một điểm M. Chứng-minh rằng SM thẳng góc với MB.

7. 4. Cho một hình tứ diện ABCD, trong đó CA = CB = DA = DB. Gọi IJ là đường nối trung-điểm của hai cạnh AB và CD. Gọi M, N, P lần-lượt là trung-điểm các cạnh CA, CB AD. Chứng-minh rằng IJ thẳng góc với mặt phẳng MNP.

7. 5. Cho một tam-giác ABC vuông góc ở A. Trên đường thẳng góc với mặt phẳng ABC kẻ từ B, lấy một điểm D. Hạ BA′ thẳng góc với DA, và BC′ thẳng góc với DC. Chứng-minh rằng :

1. BA′ trực-giao với AC.

2. BA′C′ là một tam-giác vuông góc tại A′.

7. 6. Cho một tam-giác AOB. Trên đường thẳng góc x′Ox kẻ từ O với mặt phẳng OAB, người ta lấy một điểm C. Hạ AD thẳng góc với OB và hạ AM thẳng góc với BC. MD cắt x′Ox tại N. Chứng-minh rằng những cặp đường thẳng (AB và CN), (AN và BC), (AC và BN) trực-giao với nhau. (xem bài toán dưới đây).

TOÁN

Cho một tam-giác ABC. Trên đường x'x thẳng góc với mặt ABC tại A, người ta lấy một điểm M. Nối MB, MC. Hạ BD, BE lần lượt thẳng góc với AC, MC. Gọi giao-điểm của ED với x'x là N.

1. Nhận-xét gì về phương của MN và BC ?

2. Chứng-tỏ rằng MC thẳng góc với mặt phẳng BEN. Suy ra một nhận-xét về phương của MC và BN.

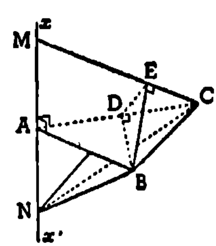
3. Định rõ vị-trí của D đối với tam-giác MCN. Nhận-xét gì về phương của MD và CN ? Chứng-tỏ rằng NC thẳng góc với mặt phẳng DMB. Suy ra rằng CN trực-giao với BM.

BÀI GIẢI

1. Phương của MN và BC.

MN thẳng góc với mặt phẳng ABC theo giả-thiết, cho nên MN trực-giao với mọi đường thẳng nằm trong mặt đó. Nói riêng ra. MN trực-giao với BC.

Ta biết thêm rằng MN cũng trực-giao với BD, và MN thẳng góc với AD, AC.



Hình 46

2. Vị-trí của MC đối với mặt phẳng BEN.

BD trực-giao với MN (theo câu 1) và thẳng góc với AC, nên BD thẳng góc với mặt MNC định bởi hai đường đồng-qui MN và AC. Do đó, BD trực-giao với MC, một đường thẳng nằm trong mặt MCN.

MC thẳng góc với BE (theo giả-thiết), vừa trực-giao với BD (theo chứng-minh trên), nên MC thẳng góc với mặt phẳng BEN (hay BED) định bởi hai đường đồng-qui BE, BD.

Ta suy ra rằng MC trực-giao với BN, một đường thẳng nằm trong mặt BEN.

3. Vị-trí của D ở trong tam-giác MCN.

Trong tam-giác MCN, hai đường cao CA và NE cắt nhau tại D; như thế, D là trực-tâm của tam-giác đó.

Phương của MD và CN.

Trong tam-giác MCN, D đã là trực-tâm, MD là đường cao thứ ba, cho nên MD phải thẳng với CN.

Sự trực-giao của CN và BM.

Theo chứng-minh trước, ta biết BD thẳng góc với mặt MCN; do đó, BD trực-giao với NC.

NC vừa thẳng góc với MD, vừa trực-giao với BD; nên NC trực-giao với BM, cạnh thứ ba của tam-giác DMB.

8

Đường thẳng và mặt phẳng thẳng góc

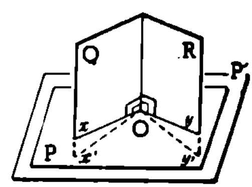
8. 1. ĐỊNH-LÝ.

Từ một điểm, người ta có thể vẽ một mặt phẳng thẳng góc với một đường thẳng cho sẵn và chỉ một thôi.

Cho một điểm O và một đường thẳng D, ta hãy tìm cách vẽ mặt phẳng P thẳng góc với D tại O.

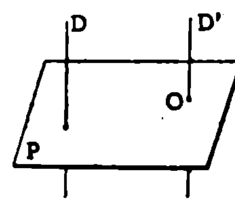
● **Trường-hợp O ở trên D** (*h. 50*).

a) Qua D, ta vẽ hay mặt phẳng khác nhau Q, R. Trong Q kẻ Ox thẳng góc với D. Trong R, kẻ Oy thẳng góc với D. Ox, Oy định được một mặt P. D thẳng góc với P vì nó thẳng góc với hai đường đồng-qui của P.



Hình 50

b) Ta hãy chứng-minh rằng P là mặt phẳng độc-nhất. Giả-sử có một mặt phẳng thứ nhì P' cùng thẳng góc với D tại O. Giao-tuyến của P' và Q là Ox'. Trong Q, Ox và Ox' cùng thẳng góc với D tại O nên chúng trùng nhau. Giao-tuyến của P' với R là Oy'. Tương-tự, Oy và Oy' trùng nhau. Do đó, P' trùng với P.



Hình 51

● **Trường-hợp O ở ngoài D** (*h. 51*).

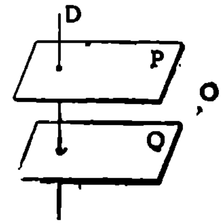
Qua O, ta vẽ D' song-song với D, mặt phẳng P nào đã thẳng góc với D' tại O thì cũng thẳng góc với D (7.8.). Ta rút trường-hợp này về trường hợp trên.

8. 2. HỆ-LUẬN.

Khi hai mặt phẳng cùng thẳng với một đường thẳng thì chúng song-song với nhau.

Giả-sử hai mặt phẳng P và Q cùng thẳng góc với đường thẳng D. Ta phải chứng-minh rằng P, Q song-song với nhau.

Nếu P và Q có một điểm chung O, thì từ O, ta có những hai mặt phẳng thẳng góc với D. Điều này trái với định-lý trên. Vậy P và Q không có điểm nào chung. Nói khác đi, chúng song-song với nhau *(so-sánh với số 7. 7.).*

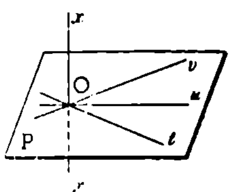


Hình 52

8. 3. ĐỊNH-LÝ.

Quỹ-tích những đường thẳng phát-xuất từ một điểm O và thẳng góc với một đường thẳng x'Ox cho sẵn là mặt phẳng P thẳng góc với x'x tại O.

1. Bất cứ đường thẳng nào thẳng góc với x'x tại O cũng nằm trong P.



Hình 53

Gọi O*u*, O*v* là hai đường thẳng góc với *x'x* (*h.53*). Chúng định được một mặt phẳng thẳng góc với *x'x* tại O. Vì lẽ rằng tại O chỉ có một mặt phẳng độc-nhất thẳng góc với *x'x* cho nên mặt (*u*O*v*) chính là mặt phẳng P. Nói khác đi, O*u*, O*v* nằm trong P.

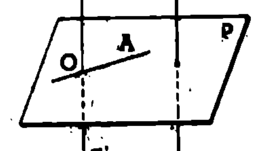
2. Bất cứ đường Ot nào nằm trong P cũng thẳng góc với x'x.

Vì *x'x* đã thẳng góc với P tại O nên *x'x* thẳng góc với mọi đường nằm trong P và đi qua O, trong số ấy có đường O*t*.

8. 4. ĐỊNH-LÝ.

Quỹ-tích những đường thẳng phát-xuất từ một điểm O và trực-giao với một đường thẳng D cho sẵn là mặt phẳng P đi qua O và thẳng góc với D.

Từ O, ta kẻ đường *x'x* song-song với D. Bất cứ đường OA nào qua O và thẳng góc với *x'x* cũng trực-giao với D ; và đảo lại, bất cứ đường nào qua O và trực-giao với D cũng thẳng góc với *x'x*. Vì thế, thay vì tìm quỹ-tích những đường OA trực-giao với D, ta đi tìm quỹ-tích những đường OA thẳng góc với *x'x*.



Hình 54

Theo định-lý 8. 3, ở trên, thì quỹ-tích đó là mặt phẳng P thẳng góc với $x'x$ tại O. P đã thẳng góc với $x'x$ thì P cũng thẳng góc với D vì D song song với $x'x$ (7. 8).

8. 5. MỘT CÁCH PHÁT-SINH MẶT PHẲNG.

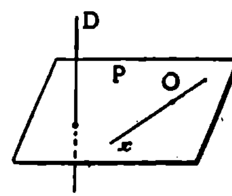
Coi một điểm cố-định O ở ngoài một đường thẳng cố-định D. Nếu một đường thẳng chuyển-động nhưng luôn luôn qua O và trực-giao với D thì nó phát-sinh ra một mặt phẳng : đó là mặt P qua O và thẳng góc với D (coi lại số 1. 9., 1. 10., 4. 10. và 5. 8.).

8. 6. ĐỊNH-LÝ.

Điều-kiện ắt có và đủ để cho hai đường thẳng trực-giao với nhau là : đường nọ ở trong một mặt phẳng thẳng góc với đường kia.

a) Giả-sử D trực-giao với Ox. Từ điểm O trên Ox, ta vẽ mặt phẳng P thẳng góc với D. P là quỹ-tích của những đường thẳng đi qua O và trực-giao với D. Ox là một trong những đường đó nên Ox nằm trong trong P.

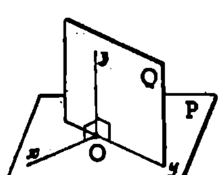
b) Giả-sử đường thẳng Ox nằm trong mặt phẳng P, và P thẳng góc với đường thẳng D. Theo định-nghĩa về đường thẳng và mặt phẳng thẳng góc thì D trực-giao với Ox.



Hình 55

8. 7. ĐỊNH-LÝ.

Từ một điểm, người ta có thể kẻ được một đường thẳng thẳng góc với một mặt phẳng cho sẵn và chỉ một thôi.



Hình 56

Coi một điểm O và một mặt phẳng P. Ta hãy tìm cách vẽ đường thẳng đi qua O và thẳng góc với P.

- **Trường-hợp O ở trong P.**

a) Trong P, ta kẻ một đường thẳng bất-kỳ Ox rồi vẽ mặt phẳng Q thẳng góc với Ox tại O *(h. 56)*.

Gọi giao-tuyến của Q và P là Oy. Trong Q, kẻ đường Oz thẳng góc với Oy. Oz ở trong Q, nên Oz thẳng góc với Ox. Tóm lại, O thẳng góc với hai đường đồng-qui Ox, Oy của P, nên Oz thẳng góc với P.

b) Ta hãy chứng-minh rằng O*z* là đường độc-nhất. Giả-sử có một đường thẳng O*z'* cũng thẳng góc với P tại O. Nếu O*z* và O*z'* đồng-qui thì chúng định được một mặt phẳng R ; giao-tuyến của R và P là O*t* *(h. 57)*.

O*z* thẳng góc với P nên O*z* thẳng góc

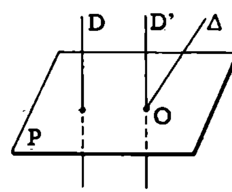
Hình 57

với O*t* ; O*z'* thẳng góc với P nên O*z'* thẳng góc với O*t*. Trong mặt phẳng R, có những hai đường thẳng O*z* và O*z'* cùng thẳng góc với O*t*. Điều đó vô-lý ! Vậy bó buộc ta phải nhận rằng O*z'* trùng với O*z*. Nói khác đi, O*z* là đường thẳng độc-nhất thẳng góc với P tại O.

- **Trường-hợp O ở ngoài mặt phẳng P.**

Ta rút trường-hợp này về trường-hợp trên:

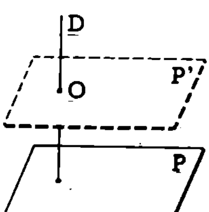
Qua O, vẽ mặt phẳng P' song-song với P (*h. 58*) rồi kẻ đường thẳng D thẳng góc với P'. D đã thẳng với P' thì cũng thẳng góc với P (7. 7.).



Hình 58

8. 8. HỆ-LUẬN.

Khi hai đường thẳng cùng thẳng góc với một mặt phẳng thì chúng song-song với nhau.



Hình 59

Giả-sử hai đường thẳng D và D' cùng thẳng góc với mặt phẳng P (*h. 59*). Gọi giao-điểm của D' với P là O, Từ O kẻ Δ song-song với D, như thế Δ thẳng góc với P (7. 8.). Từ O, chỉ có một đường thẳng độc-nhất thẳng góc với P. Vậy Δ trùng với D'. Do đó, D' song-song với D.

BÀI TẬP

8. 1. *Cho một hình vuông ABCD. Trên đường thẳng góc với mặt phẳng hình vuông kẻ từ A và C, người ta lần-lượt lấy những điểm A' và C'. Chứng-minh rằng đường chéo BD trực-giao với A'C'.*

8. 2. *Cho một điềm O ở ngoài một đường thẳng D. Gọi P là một mặt phẳng lưu-động đi qua D. Hạ OH thẳng góc với mặt phẳng.*

1. Tìm quỹ-tích của đường thẳng OH.

2. Tìm quỹ-tích của H.

3. Định mặt phẳng P biết OH = d (d là một đoạn dài cho sẵn).

8. 3. *ABC là một tam-giác cố-định vuông góc ở C. S là một điềm lưu-động trên đường x'Ax thẳng-góc với mặt phẳng ABC.*

1. Chứng-tỏ rằng các mặt của tứ-diện SABC là những tam-giác vuông góc.

2. Gọi D là chân đường cao AD của tam-giác SAB. Gọi F là chân đường cao AF của tam-giác SAC. Tìm quỹ-tích của D và F khi S lưu-động trên x'x.

3. Chứng-minh rằng AF thẳng góc với mặt phẳng SBC.

4. Chứng-minh rằng năm điềm A, B, C, D, F nằm trên một hình cầu.

5. Chứng-minh rằng DE thẳng góc với SB và AF.

TOÁN

Cho một hình vuông ABCD, cạnh là a. Kẻ x'Ax thẳng góc với mặt phẳng của hình vuông. Trên x'x, ta lấy một điềm M. Hạ AI, AH, AJ thẳng góc lần-lượt với MB, MC, MD.

1. Chứng-tỏ rằng AI, AJ trực-giao với MC.

Suy ra rằng AI, AH, AJ cùng nằm trong một mặt phẳng.

2. Quỹ-tích của I, H, J khi M lưu-động trên đường thẳng x'Ax.

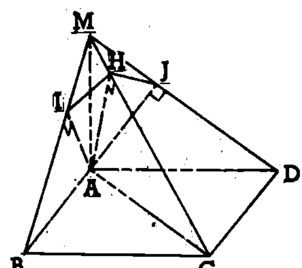
3. Nhận-xét gì về góc $\widehat{AIC}$, $\widehat{AJC}$? Chứng-tỏ rằng bảy điềm A, B, C, D, H, I, J, ở trên một hình cầu.

BÀI GIẢI

1. AI trực-giao với MC.

x'Ax thẳng góc với mặt phẳng của hình vuông ABCD nên nó thẳng góc với AB, AC và trực-giao với CB, CD.

AI thẳng góc với MB theo giả-thiết và trực-giao với CB, nên AI thẳng góc với mặt phẳng MBC định bởi hai đường thẳng đồng-qui MB, MC. Ta suy ra AI trực-giao với MC và AI thẳng góc với IC ($\widehat{AIC} = 90^o$). Chứng-minh tương-tự, ta có AJ trực-giao với MC (và AJ thẳng góc với JC : $\widehat{AJC} = 90^o$).



Hình 60

AI, AH, AJ cùng ở trong một mặt phẳng.

Ba đường thẳng AI, AH, AJ cùng phát-xuất từ A, cùng trực-giao với MC (nói riêng, AH thẳng góc với MC theo giả-thiết). Vì thế, ba đường đó cùng nằm trong mặt phẳng P, đi qua A và thẳng góc với MC tại H.

2. Quỹ-tích của H.

Ta biết $\widehat{AHC} = 90^o$. Điểm H nhìn đoạn AC cố-định dưới một góc vuông, và luôn luôn nằm trong mặt phẳng cố-định (C, $x'Ax$). Khi M vạch nên đường thẳng $x'x$, thì H vạch nên vòng tròn đường kính AC dựng trong mặt phẳng (C$x'x$). Đó là quỹ-tích của H.

Quỹ-tích của I.

Ta biết $\widehat{BIA} = 90^o$. Điểm I nhìn đoạn AB cố-định dưới một góc vuông, và luôn luôn nằm trong mặt phẳng cố-định (B, x' Ax). Khi M vạch nên đường thẳng $x'x$, thì I vạch nên vòng tròn đường kính AB dựng trong mặt phẳng (B$x'x$). Đó là quỹ-tích của I.

Tương-tự, ta tìm ra quỹ-tích của J.

3. Hình cầu qua bảy điểm A, B, C, D, H, I, J.

Bảy điểm nói trên không cùng ở trong một mặt phẳng (trừ khi M ở A: lúc đó ba điểm I, H, J đều ở A).

Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = \widehat{AHC} = \widehat{AIC} = \widehat{AJC} = 90^o$. Năm điểm B, D, I, H, J cùng nhìn đoạn AC dưới một một góc vuông, nên chúng nằm trên hình cầu mà đường kính là AC.

9 Đoạn thẳng góc và đoạn xiên

9. 1. ĐỊNH-LÝ THUẬN.

Từ một điểm ở ngoài một mặt phẳng, ta kẻ đoạn thẳng góc và các đoạn xiên đối với mặt đó:

1. Đoạn thẳng góc ngắn hơn mỗi đoạn xiên.

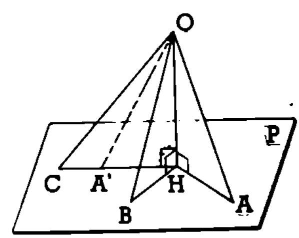
2. Nếu chân hai đoạn xiên cách đều chân đoạn thẳng góc thì hai đoạn xiên đó bằng nhau.

3. Trong hai đoạn xiên, đoạn nào có chân ở xa chân đoạn thẳng góc hơn thì đoạn đó dài hơn.

Gọi OH là đường thẳng góc với mặt phẳng P và OA, OB, OC là những đoạn xiên.

1. Tam-giác vuông góc OHA cho ta : OH < OA.

2. Giả-sử HA = HB. Xét hai tam-giác vuông góc OHA, OHB. Chúng có HA = HB theo giả-thiết và OH chung. Vậy chúng bằng nhau. Suy ra : OA = OB.



Hình 67

3. Giả-sử HC > HA. Ta phải chứng-minh : OC > OA. Lấy trên HC một điểm A' để cho HA' = HA. Theo phần 2, ta có OA = OA'. Trong mặt phẳng OHC, đoạn OC có chân C ở xa H hơn chân của OA'. Vậy OC > OA'. Do đó OC > OA.

9. 2. ĐỊNH-LÝ ĐẢO.

Nối một điểm ở ngoài một mặt phẳng với nhiều điểm của mặt phẳng đó, ta có vô-số đoạn thẳng:

***1.* Trong tất cả những đoạn mà ta có thể tưởng-tượng ra, đoạn ngắn nhất là đoạn thẳng góc với mặt phẳng.**

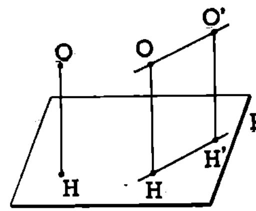
***2.* Nếu hai đoạn xiên bằng nhau, thì chân của chúng cách đều chân đường thẳng góc.**

3. Nếu hai đoạn xiên không bằng nhau, thì chân của đoạn dài hơn phải ở xa chân đường thẳng góc hơn.

1. Giả-sử đoạn OH là đoạn ngắn nhất trong tất cả các đoạn mà ta có thể tưởng-tượng ra. OH phải là đoạn thẳng góc với P; nếu không ta có thể tìm ra một đoạn thẳng góc với P, ngắn hơn OH theo định-lý thuận. Điều đó vô-lý vì ta đã coi OH là ngắn nhất rồi.

2. Nếu OA = OB thì ta không thể có HA ≠ HB, vì theo định-lý thuận, điều-kiện HA ≠ HB sẽ làm cho OA ≠ OB, trái giả-thiết ! Vậy ta phải có HA = HB.

3. Nếu OC > OA thì ta không thể có HC ≤ HA, vì theo định-lý thuận, điều-kiện HC ≤ HA sẽ làm cho OC ≤ OA, trái giả-thiết. Vậy ta phải có HC > HA.



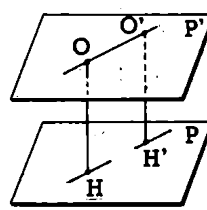
Hình 62

9. 3. ĐỊNH-NNHĨA.

1. Khoảng-cách từ một điểm tới một mặt phẳng là chiều dài của đoạn thẳng góc kẻ từ điểm ấy tới mặt phẳng *(h. 62)*.

2. Khoảng-cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song-song là chiều dài của đoạn thẳng góc với đường thẳng và mặt phẳng *(h. 62)*.

3. Khoảng-cách giữa hai mặt phẳng song-song là chiều dài của đoạn thẳng góc với cả hai mặt đó *(h. 63)*.



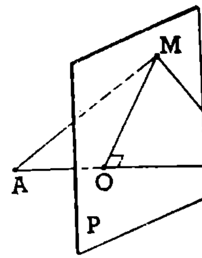
Hình 63

9.4. QUỸ-TÍCH NHỮNG ĐIỂM CÁCH ĐỀU HAI ĐIỂM A, B.

Ta có hai điểm cố-định A, B. Gọi O là trung-điểm của đoạn AB (*h. 64*).

1. Nếu MA = MB, thì MAB là một tam-giác cân ; trung-tuyến MO cũng là đường cao. MO hẳn là phải ở trong mặt phẳng P thẳng góc với AB tại O. Vậy *điểm M nào cách điều A và B cũng phải ở trong P*.

2. Nếu M ở trong P thì MO vừa là đường cao, vừa là trung-tuyến của tam-giác MAB. Suy ra MAB là một tam-giác cân đỉnh M, tức là MA = MB. Vậy *điểm nào ở trong P cũng cách đều A và B.*



Hình 64

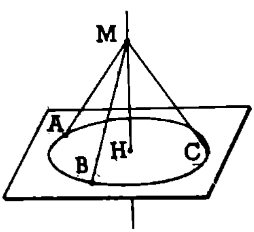
Mặt P thẳng góc với đoạn AB tại trung-điểm của AB : P được gọi là *mặt trung-trực* của AB.

ĐỊNH-LÝ.

Quỹ-tích những điểm cách đều hai điểm A, B là mặt trung-trực của đoạn AB.

9. 5. QUỸ-TÍCH NHỮNG ĐIỂM CÁCH ĐỀU BA ĐIỂM A, B, C KHÔNG THẲNG HÀNG.

Ta có ba điểm cố-định A, B, C không thẳng hàng. Gọi M là một điểm ở trong không-gian. Nối MA, MB, MC và hạ MH thẳng góc với mặt phẳng ABC.



Hình 65

Theo định-lý thuận về đoạn thẳng góc và đoạn xiên, nếu ta có HA = HB = HC thì ta cũng có MH = MB = MC.

Theo định-lý đảo về đoạn thẳng góc và đoạn xiên, nếu ta có MA = MB = MC, thì ta cũng có HA = HB = HC.

Tóm lại, ***điều-kiện ắt có và đủ*** để cho MA = MB = MC là HA = HB = HC.

H chính là tâm vòng tròn ngoại-tiếp của tam-giác ABC. Quỹ-tích của điểm M — cách đều ba điểm A, B, C — là đường thẳng D thẳng góc với mặt của vòng tròn ABC tại tâm của vòng đó, D gọi là *trục của vòng tròn ABC.*

ĐỊNH-LÝ.

Quỹ-tích những điểm cách đều ba điểm A, B, C. không thẳng hàng là trục của vòng tròn ABC.

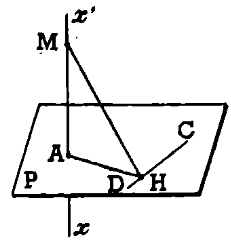
9. 6. ĐỊNH-LÝ BA ĐƯỜNG THẲNG GÓC.

Một mặt phẳng P dựng đường thẳng CD. Gọi x'x là đường thẳng góc với P tại điểm A.

a) **ĐỊNH-LÝ THUẬN.** **Nếu từ một điểm M trên đường x'Ax, ta hạ MH thẳng góc với CD thì AH cũng thẳng góc với CD.**

CH thẳng góc với MH trực-giao với MA, nên CH thẳng góc với AH, cạnh thứ ba của tam-giác MAH.

b) **ĐỊNH-LÝ ĐẢO.** **Nếu ta hạ AH thẳng góc với CD và nối H với bất cứ điểm M nào ở trên x'Ax, thì MH thẳng góc với CD.**



Hình 66

CH thẳng góc với AH và trực-giao với MA, nên CH thẳng góc với MH, cạnh thứ ba của tam-giác MAH.

BÀI TẬP

9. 1. *Thế nào là khoảng-cách từ một điểm tới một mặt phẳng? Tìm quỹ-tích những điểm mà khoảng-cách tới một mặt phẳng P là hằng-số d.*

9. 2. *Cho hai mặt phẳng P_1, P_2 và hai đoạn d_1, d_2. Tìm quỹ-tích những điểm M, biết rằng khoảng-cách từ M tới P_1 là d_1, và khoảng-cách từ M tới P_2 là d_2.*

9. 3. *Cho hai điểm A, B và một mặt phẳng P. Tìm quỹ-tích những điểm đựng trong P và cách đều A, B.*

9. 4. *Cho hai điểm A, B. Gọi P là một mặt phẳng đi qua trung-điểm O của đoạn AB. Chứng-minh rằng khoảng-cách từ A và B tới P bằng nhau (ta nói : A và B cách đều P). Ứng-dụng : Vẽ một mặt phẳng chứa một đường thẳng D và cách đều hai điểm A, B cho sẵn.*

9. 5. *Cho hai điểm cố-định A, B và một đường thẳng D. Hãy tìm trên D một điểm C để cho tam-giác CAB là tam-giác cân đỉnh C.*

9. 6. *Đầu bài như trên, nhưng thay câu «đường thẳng D» bằng câu «vòng tròn Y»*

9. 7. *Cho ba điểm A, B, C không thẳng hàng và một mặt phẳng P. Hãy tìm trên P một điểm O để có thể dùng O làm tâm một hình cầu đi qua A, B, C.*

9. 8. *Cho một điểm O ở ngoài mặt phẳng P. Tìm quỹ-tích của chân những đoạn xiên OM, biết rằng OM = hằng-số.*

9. 9. *Cho một điểm O ở ngoài một mặt phẳng P. Trong P, có một đường thẳng D quay quanh một điểm cố-định A. Hạ OM thẳng góc với D và OH thẳng góc với P.*

1. Chứng-minh rằng HMA là một góc vuông. Suy ra quỹ-tích của M.

2. Định vị-trí của D để cho đoạn OM ngắn nhất hoặc dài nhất.

TOÁN

Cho hai đường thẳng x'Ax và y'By trực-giao. Đoạn thẳng AB thẳng góc với x'x và y'y. Một điểm C lưu-động trên x'x và một điểm D lưu-động trên y'y. Ta đặt AB = a, CD = d (a, d là những hằng-số và d > a).

1. Làm cách nào vẽ được mặt phẳng P chứa By và song-song với x'x ? Nhận-xét gì về AB và P ?

2. Hạ CC' thẳng góc với P. Tam-giác C'BD ra sao ? Chứng-tỏ rằng $AC^2 + BD^2$ và $AD^2 + BC^2$ là những hằng-số.

3. Chứng-tỏ rằng cosin của góc nhọn của hai đường thẳng AB, CD là một hằng-số.

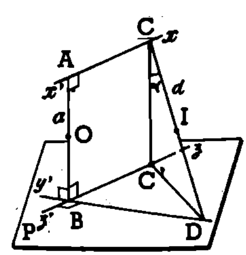
4. Chứng-tỏ rằng trung-điểm I của CD nằm trên mặt trung-trực của đoạn CD. Tính khoảng-cách OI (O là trung-điểm của AB). Suy ra quỹ-tích của I khi C, D lưu-động trên x'x, y'y theo thứ-tự.

BÀI GIẢI

1. Cách vẽ mặt phẳng P.

Từ điểm B, ta vẽ đường thẳng *z'Bz* song-song với *x'Ax*.

z'z và *y'y* định được mặt phẳng P. Đó là mặt phẳng chứa *y'By* và song-song với *x'x*. Ta nhận-xét rằng AB là đường thẳng góc chung của *x'x*, *z'z* ; và *z'z*, *y'y* thẳng góc với nhau.



Hình 67

Vị-trí của AB đối với P.

AB thẳng góc với *y'y* và *z'z* cho nên AB thẳng góc với P (mặt phẳng định bởi hai đường đồng-qui *y'y*, *z'z*).

2. Trị-số của $AC^2 + BD^2$ và $AD^2 + BC^2$.

CA thẳng góc với AB và trực-giao với BD nên CA thẳng góc với AD, cạnh thứ ba của tam-giác ABD.

Tương-tự, CB thẳng góc với BD.

Dùng hai tam-giác vuông CAD, ABD ta có

$$AC^2 = d^2 - AD^2$$
$$BD^2 = AD^2 - a^2$$

Vậy $$AC^2 + BD^2 = d^2 - a^2 \text{ (= hằng-số).}$$

Dùng hai tam-giác vuông ABD, CBD ta có

$$AD^2 = a^2 + BD^2$$
$$BC^2 = d^2 - BD^2$$

Suy ra $$AD^2 + BC^2 = a^2 + d^2 \text{ (= hằng-số).}$$

3. Góc của AB và CD.

Khi ta hạ CC' thẳng góc với P thì CC' song-song với AB. C' nằm trên $z'z$.

Tứ-giác ACC'B là một hình chữ-nhật.

Ta biết CC' song-song với AB, và CC' $= a$. Góc nhọn của AB và CD là $\alpha = \widehat{C'CD}$. Trong tam-giác vuông góc C'CD, ta có

$$\cos \alpha = \frac{CC'}{CD} = \frac{a}{d} \text{ (= hằng-số).}$$

4. I ở trên mặt trung-trực của AB.

Ta đã biết DBC là một tam-giác vuông góc tại B. Vì thế, trung-tuyến BI bằng nửa cạnh huyền CD :

$$BI = \frac{CD}{2} = \frac{d}{2}.$$

CA thẳng góc với AB, và trực-giao với BD, nên CA thẳng góc với AD (cạnh thứ ba của tam-giác ABD). Nói khác đi, CAD là một tam-giác vuông góc tại A. Do đó :

$$AI = \frac{CD}{2} = \frac{d}{2}$$

Vậy $$IA = IB = \frac{d}{2}$$

I cách đều A và B, nên I nằm trên mặt trung-trực π của đoạn AB.

Trị-số của đoạn OI.

Trong tam-giác vuông góc AOI, ta có

$$OI^2 = AI^2 - AO^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{d^2 - a^2}{4}$$

Suy ra $$OI = \frac{\sqrt{d^2 - a^2}}{2} \text{ (= hằng-số } r).$$

Quỹ-tích của I.

Quỹ-tích của I là vòng tròn tâm O, bán-kính $r = \dfrac{\sqrt{d^2 - a^2}}{2}$, nằm trong mặt phẳng π,

10

Góc nhị-diện

10. 1. ĐỊNH-NGHĨA.

Nhị-diện hay góc nhị-diện là hình hợp bởi hai nửa mặt phẳng phát-xuất từ một đường thẳng.

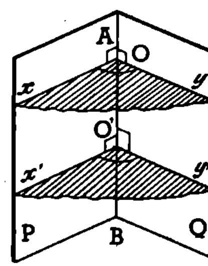
Mỗi nửa mặt phẳng gọi là một *mặt* của nhị-diện, đường thẳng chung gọi là *cạnh* của nhị-diện. Trong hình 68, ta có nhị-diện (P, AB, Q).

Hai nhị-diện *bằng nhau* là hai nhị-diện có thể *chồng khít* lên nhau.

10. 2. GÓC PHẲNG.

Lấy một điểm O trên cạnh AB. Trong mặt P, kẻ Ox thẳng góc với AB. Trong mặt Q, kẻ Oy thẳng góc với AB. $\widehat{xOy}$ gọi là *góc phẳng* của nhị-diện.

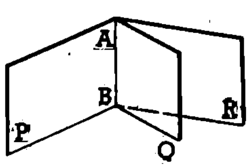
Có thể tìm góc phẳng của nhị-diện bằng cách sau này: cắt nhị-diện bằng một mặt phẳng thẳng góc với AB.



Hình 68

Ta nên nhớ rằng vị-trí điểm O không ảnh-hưởng đến số đo của góc phẳng: Hai góc xOy và $x'O'y'$ bằng nhau vì có cạnh song-song cùng chiều.

10. 3. NHỊ-DIỆN KỀ NHAU.



Hình 69

Hai nhị-diện kề nhau là hai nhị-diện có cạnh chung, một mặt chung và ở hai bên của mặt chung.

(P, AB, Q) và (Q, AB, R) là hai nhị-diện kề nhau (*h. 69*).

Muốn cộng hai nhị-diện thì người ta đặt chúng thành nhị-diện kề nhau.

Nhị-diện (P, AB, R) trong hình 69 là tổng của hai nhị-diện (P, AB, Q) và (Q, AB, R).

10. 4. SO-SÁNH HAI NHỊ-DIỆN.

Muốn so-sánh hai nhị-diện, ta đặt chúng sau cho có cạnh chung, một mặt chung và chúng ở về cùng một bên của mặt chung đó.

Trong hình 69, ta so-sánh hai nhị-diện (P, AB, R) và (P, AB, Q), ta được hiệu của chúng là nhị-diện (Q, AB, R).

10. 5. ĐỊNH-LÝ.

Khi hai nhị-diện bằng nhau thì góc phẳng của chúng bằng nhau và đảo lại.

1. Khi hai nhị-diện bằng nhau thì chúng chồng khít và góc phẳng cũng chồng khít.

2. Giả-sử hai nhị-diện có góc phẳng bằng nhau. Ta có thể đặt cho hai góc phẳng đó chồng khít. Cạnh của hai nhị-diện phải trùng nhau vì chúng cùng thẳng góc với mặt của góc phẳng tại một điểm. Như thế, hai nhị-diện chồng khít được.

10. 6. PHÉP ĐO NHỊ-DIỆN.

Để đo nhị-diện, ta phải chọn đơn-vị.

Người ta chọn đơn-vị nhị-diện như sau : **lấy đơn-vị nhị-diện là nhị-diện mà góc phẳng bằng đơn-vị góc (tức là góc vuông).**

Một nhị-diện mà góc vuông gọi là một *nhị-diện vuông.*

Góc vuông chia thành 90 phần bằng nhau, mỗi phần là một góc 1°.

Nhị-diện vuông chia thành 90 phần bằng nhau, mỗi phần là một nhị-diện 1°.

Nhị-diện 1° có góc phẳng là góc 1°.

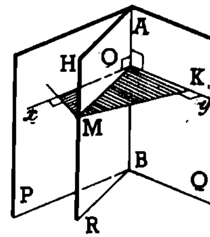
Nhị-diện 23°15'46" có góc phẳng là góc 23°15'46".

Xem thế : **Số đo nhị-diện bằng số đo góc phẳng của nó** (nên nhớ : ta không nói « nhị-diện bằng góc phẳng », ta chỉ nói tới « số đo » thôi).

10. 7. MẶT PHẲNG PHÂN-GIÁC CỦA MỘT NHỊ-DIỆN.

Mặt phân-giác của một nhị-diện là nửa mặt phẳng phát-xuất từ cạnh nhị-diện và chia nhị-diện làm hai phần bằng nhau.

Lấy một điểm M trên mặt phân-giác R của nhị-diện (P, AB, Q) rồi hạ MH, MK thẳng góc lần lượt với P và Q. MH và MK trực-giao với AB. Chúng định được một mặt phẳng thẳng góc với AB tại O. Như thế $\widehat{HOK}$ là góc phẳng của nhị-diện (P, AB, Q). OM là đường phân-giác của góc $\widehat{HOK}$, vì hai góc $\widehat{MOH}$, $\widehat{MOK}$ bằng nhau.



Hình 70

Suy ra MH = MK, nghĩa là *M cách đều hai mặt của nhị-diện.*

Đảo lại, nếu MH = MK thì OM là đường phân-giác của góc $\widehat{HOK}$. Suy ra : OM nằm trên mặt phân-giác R của nhị-diện (P, AB, Q), nghĩa là *M ở trên mặt phân-giác của nhị-diện.* Vậy ta có

ĐỊNH-LÝ.

Mặt phân-giác của một nhị-diện là quỹ-tích những điểm nằm trong nhị-diện và cách đều hai mặt của nhị-diện đó.

BÀI TẬP

10. 1. *Cho ba đoạn OA, OB, OC thẳng góc nhau đôi một (ta nói OABC là một tam-diện ba góc vuông). Cho biết OA = OB = OC. Tính số đo của nhị-diện (O, AB, C).*

10. 2. *Cho một góc vuông $x\hat{O}y$. Người ta kẻ một đường thẳng Oz không dựng trong mặt phẳng xOy. Góc của Oz với mỗi đường Ox, Oy là 60°. Tính số đo của nhị-diện (x, Oz, y) (hãy vẽ một góc phẳng của nhị-diện).*

10. 3. *Cho một tam-giác đều ABC, cạnh là a. Trên đường thẳng góc với mặt phẳng ABC kẻ từ tâm O của vòng tròn ABC, người ta lấy một điểm S. Hãy tính OS sao cho số đo của nhị-diện (S, AB, C) là 60°.*

10. 4. *Trong một mặt phẳng P, có một hình thoi ABCD cạnh là a. Cho DB = $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.*

Từ tâm đối-xứng O của hình thoi, người ta kẻ đường thẳng góc với P, trên đó lấy một điểm S sao cho SB = SD = a. Chứng-minh rằng :

1. $\widehat{ASC} = 90^o$.

2. *SC trực-giao với BD.*

3. *Nhị-diện (B, SA, D) là một nhị-diện vuông góc.*

TOÁN

Cho một hình tứ-diện đều ABCD, cạnh là a. Gọi I, J là trung-điểm của AB và CD.

1. Chứng-tỏ rằng $\widehat{CID}$ là một góc phẳng của nhị-diện (AB).

2. Chứng-tỏ rằng mặt (ABJ) là mặt phân-giác của nhị-diện (AB) đồng-thời là mặt trung-trực của đoạn CD.

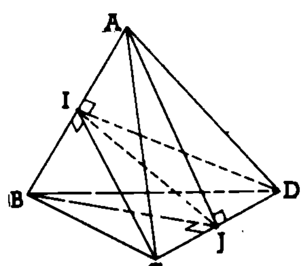
3. Tính số đo của nhị-diện (AB).

BÀI GIẢI

1. Góc phẳng của nhị-diện (AB).

Trong tam-giác đều ABC, trung-tuyến CI đồng-thời là đường cao : CI thẳng góc với AB.

Tương-tự, DI thẳng góc với AB. Mặt phẳng CID thẳng góc với cạnh AB của nhị-diện (C, AB, D) và cắt nhị-diện thành góc $\widehat{CID}$ cho nên $\widehat{CID}$ là góc phẳng của nhị-diện đó. Chứng-minh tương-tự, ta biết $\widehat{AJB}$ là góc phẳng của nhị-diện (CD)



Hình 71

2. Mặt phân-giác của nhị-diện (AB) và mặt trung-trực của đoạn CD.

Ta có $CI = DI = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. Như thế tam-giác CID làm một tam-giác cân, đỉnh là I. Trung-tuyến IJ đồng-thời là phân-giác của góc $\widehat{CID}$.

Mặt phân-giác của một nhị-diện có thể định bằng cạnh của nhị-diện và đường phân-giác của một góc phẳng. Ở đây, mặt phân-giác của nhị-diện (AB) được định bởi AB và IJ. Vậy mặt (ABJ) chính là mặt phân-giác của nhị-diện (AB).

Ba điểm A, B, J không thẳng hàng. Chúng cách đều hai điểm C và D (AC = AD, BC = BD, JC = JD). Vậy mặt (ABJ) là mặt trung-trực của đoạn CD.

3. Số đo của nhị-diện (AB).

Ta đặt $\widehat{CID} \doteq 2\alpha$. Trong tam-giác cân CID, IJ là trục đối-xứng, ta có $\widehat{CIJ} = \widehat{JID} = \alpha$.

Trong tam-giác vuông góc IJC, ta có ;

$$\sin\alpha = \frac{CJ}{IC} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}577$$

Ta suy ra $\alpha \simeq 35^{\circ}15'$ và $\widehat{CID} = 2\alpha \simeq 70^{\circ}30'$.

11

Mặt phẳng thẳng góc

11. 1. ĐỊNH-NGHĨA.

Hai mặt phẳng được gọi là thẳng góc khi chúng tạo nên một nhị-diện vuông.

Dĩ-nhiên ba nhị-diện còn lại cũng vuông góc cả. Vì thế ta nói được: hai mặt phẳng thẳng góc tạo nên bốn nhị-diện vuông *(h. 72)*.

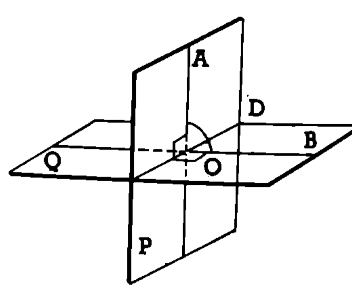
Điều-kiện ắt có và đủ để cho một nhị-diện vuông là: góc phẳng của nó vuông. Vì thế muốn chứng-minh rằng hai mặt phẳng thẳng góc với nhau thì ta có thể chứng-minh rằng góc phẳng của một trong bốn nhị-diện do chúng tạo nên là một góc vuông.

11. 2. ĐỊNH-LÝ THUẬN.

Khi hai mặt phẳng thẳng góc với nhau thì mặt nọ chứa một đường thẳng thẳng góc với mặt kia.

Coi hai mặt phẳng thẳng góc P, Q mà giao-tuyến là D *(h. 72)*. Ta hãy chứng-minh rằng P chứa một đường thẳng góc với Q.

Lấy một điểm O trên D. Trong P, vẽ OA thẳng với góc D. Trong Q, vẽ OB thẳng với góc D. Như thế, $\widehat{AOB}$ là một góc phẳng của nhị-diện vuông (P, Q). Do đó $\widehat{AOB} = 90^o$.



Hình 72

OA thẳng góc với D và OB; thế mà D và OB là hai đường thẳng đồng-qui ở trong Q; Vậy OA thẳng góc với Q.

Tương-tự, OB thẳng góc với P.

11. 3. ĐỊNH-LÝ ĐẢO.

Có hai mặt phẳng, nếu mặt nọ chứa một đường thẳng thẳng góc với mặt kia thì hai mặt đó thẳng góc với nhau.

Giả-sử mặt P chứa đường thẳng OA, và OA thẳng góc với mặt Q tại O (*h. 72*). Ta hãy chứng-minh rằng P và Q thẳng góc với nhau.

Gọi giao-tuyến của P, Q là D (O nằm trên D). Trong Q, ta vẽ OB thẳng góc với D.

OA thẳng góc với Q, nên OA thẳng góc với OB: $\widehat{AOB} = 90°$.

OA, OB thẳng góc với D và ở trong P, Q theo thứ-tự. Vậy $\widehat{AOB}$ là một góc phẳng của nhị-diện (P, Q).

$\widehat{AOB}$ là góc vuông, nên nhị-diện (P, Q) là nhị-diện vuông. Nói khác đi, P thẳng góc với Q.

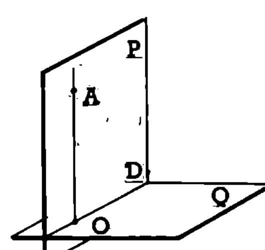
11. 4. PHÁT-BIỂU ĐỘC-NHẤT.

Điều-kiện ắt có và đủ để cho hai mặt phẳng thẳng góc với nhau là: mặt nọ chứa một đường thẳng thẳng góc với mặt kia.

11. 5. HỆ-LUẬN 1.

Có hai mặt phẳng thẳng góc, nếu từ một điểm trong mặt thứ nhất, ta kẻ đường thẳng góc với mặt thứ nhì, thì đường đó hoàn-toàn nằm trong mặt thứ nhất.

Có hai mặt phẳng thẳng góc P, Q. Lấy một điểm A trong P, kẻ AO thẳng góc với giao-tuyến D của P, Q (*h. 73*). Theo điều-kiện ắt có, AO thẳng góc với Q. Thế mà ta biết rằng từ một điểm A, chỉ kẻ được một đường thẳng thẳng góc với mặt Q thôi. Vậy nếu từ A, ta kẻ đường thẳng thẳng góc với Q, thì nó nằm trong P.



Hình 73

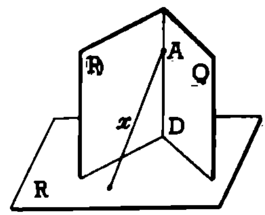
Ta cũng có thể nói điều sau này: **Có hai mặt phẳng thẳng góc. Nếu từ một điểm của mặt thứ nhất, ta kẻ đường thẳng góc với giao-tuyến thì đường đó thẳng góc với mặt thứ nhì.**

11. 6. HỆ-LUẬN 2.

Khi hai mặt phẳng cắt nhau cùng thẳng góc với một mặt thứ ba, thì giao-tuyến của chúng cũng thẳng góc với mặt thứ ba đó.

Giả-sử hai mặt P, Q cùng thẳng góc với mặt R *(h. 74)*. Gọi giao-tuyến của P, Q là D. Ta hãy chứng-minh rằng D thẳng góc với R.

Lấy một điểm A trên D, kẻ Ax thẳng góc với R. Theo hệ-luận trên, Ax phải nằm trong P, và phải nằm trong Q. Như thế Ax chính là D. Ax đã thẳng góc với R nên D thẳng góc với R.

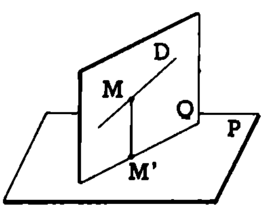


Hình 74

11. 7. HỆ-LUẬN 3.

Qua một đường thẳng không thẳng góc với một mặt phẳng, người ta có thể vẽ được một mặt phẳng thẳng góc với mặt đó, và chỉ một thôi.

Coi đường thẳng D và mặt P. Lấy một điểm M trên D rồi hạ MM' thẳng góc với P. Hai đường thẳng đồng-qui D và MM' định được một mặt phẳng Q. Theo điều-kiện đủ thì P thẳng góc với Q.



Hình 75

Nếu M lưu-động trên D thì MM' cũng lưu-động, nhưng phương của MM' không đổi (đó là phương thẳng góc với P). Do đó mặt Q không đổi. Nói khác đi, Q là mặt phẳng độc nhất mà ta vẽ được.

Nếu D thẳng góc với P thì bài toán vô-định : ta có vô-số mặt phẳng chứa D và thẳng góc với P.

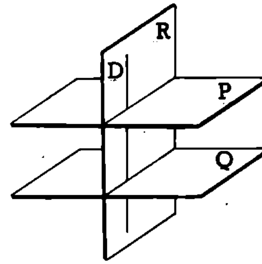
11. 8. ĐỊNH-LÝ.

Có hai mặt phẳng song-song, mặt phẳng nào thẳng góc với mặt thứ nhất thì cũng thẳng góc với mặt thứ nhì.

Coi hai mặt phẳng song-song P, Q và một mặt R thẳng góc với P *(h. 76)*. Trong R, ta có thể vẽ được đường D thẳng góc với P (11.2.) Như thế nó cũng thẳng góc với Q. R chứa đường D thẳng góc với Q nên R thẳng góc với Q (11.3.).

Chú-ý. *Không có định-lý đảo,* nghĩa là *không có* định-lý này «Khi hai mặt cùng thẳng góc với một mặt thứ ba thì chúng song-song với nhau».

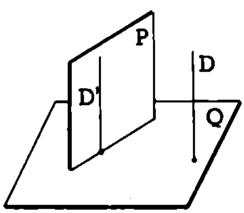
Sự thật thì : «Khi hai mặt cùng thẳng góc với một mặt thứ ba thì giao-tuyến của chúng — nếu có — thẳng góc với mặt thứ ba đó».



Hình 76

11. 9. ĐỊNH-LÝ THUẬN.

Khi một đường thẳng và một mặt phẳng cùng thẳng góc với một mặt phẳng thì chúng song-song với nhau.



Hình 77

Giả-sử đường thẳng D và mặt phẳng P cùng thẳng góc với mặt Q (*h. 77*). Trong P, ta vẽ được một đường thẳng D' thẳng góc với Q (11. 2) ; D và D' cùng thẳng góc với Q nên song-song với nhau.

D song-song với D' ; thế mà D' lại ở trong mặt P, nên D song-song với P (4. 4).

11. 10. ĐỊNH-LÝ ĐẢO.

Có một đường thẳng và một mặt phẳng song-song, mặt phẳng nào thẳng góc với đường thẳng thì cũng thẳng góc với mặt phẳng.

Coi đường thẳng D và mặt phẳng P song-song giả-sử ; mặt phẳng Q thẳng góc với D. Ta hãy chứng-minh Q thẳng góc với P.

Vì D song-song với P nên trong P, ta vẽ được một đường D' song-song với D. Q đã thẳng góc với D thì cũng thẳng góc với D' (7. 8).

Mặt P chứa D', thế mà D' thẳng góc với Q. Vậy P thẳng góc với Q (11. 3).

BÀI TẬP

11. 1. *Cho một tứ-diện OABC. Ba góc ở O đều vuông, OA = OB = OC = a. Gọi I là trung-điểm của BC.*

1. Chứng-tỏ BC thẳng góc với mặt (OAI). Nhận-xét gì về hai mặt phẳng ABC, AOI ?

2. Đường cao CD của tam-giác ABC cắt AI ở K. Chứng-tỏ AB thẳng góc với mặt (ODC), và hai mặt ODC, ABC thẳng góc với nhau.

2. Chứng-tỏ OK thẳng góc với (ABC). Tính OK và diện-tích tam-giác ABC theo a.

11. 2. Cho một hình tứ-diện đều $SABC$, cạnh là a. Gọi H là trực-tâm của ABC, AH cắt BC ở D.

1. Chứng-tỏ BC, AS trực-giao với nhau là hai mặt phẳng ASD, BSC thẳng góc với nhau.
2. Gọi K là trung-điểm của SA, chứng-tỏ DK là đường thẳng thẳng góc chung của AS, BC.
3. Tính AH, HS, DK và diện-tích tam-giác BKC theo a.
4. Định trên HS một điểm O sao cho $\widehat{BOC} = 90^0$. Nhận-xét gì về tam-diện $OABC$?

11. 3. Cho hai tam-giác cân ACD, BCD không cùng nằm trong một mặt phẳng, đáy chung là $CD = 2x$, các cạnh khác dài bằng a.

1. Gọi I, J là trung-điểm AB và CD, chứng-tỏ rằng IJ thẳng góc với AB, CD.
2. Tam-giác ACD cố định, tam-giác BCD quay quanh CD. Quỹ-tích của điểm I.
3. Giả-sử hai mặt chứa hai tam-giác thẳng góc nhau. Tính AB, IJ. Định điểm cách đều bốn điểm A, B, C, D.

11. 4. Trong một mặt phẳng P, cho một vòng O đường kính $AB = 2a$. Lấy một dây cung $BC = a$. Trên đường thẳng kẻ từ A với mặt P, người ta lấy $AS = 2a$.

1. Chứng-tỏ rằng hai mặt phẳng SCB, SCA thẳng góc với nhau.
2. Hạ AD thẳng góc với SC, và AE thẳng góc với SB. Chứng-tỏ rằng hai mặt phẳng SCB và ADE thẳng góc với nhau. Chứng-tỏ $\widehat{ADE} = 90^0$. Tính các cạnh của tam-giác ADE theo a.
3. Định giao-điểm I của DE với P. Tính IB. Chứng-tỏ AI tiếp-xúc với vòng O.

11. 5. Trong một mặt phẳng P, cho một vòng tròn O đường kính AB. Gọi Ax là nửa đường thẳng thẳng góc với mặt P. Trên Ax, người ta lấy một điểm C. Trên vòng tròn, người ta lấy một điểm M.

1. Chứng-tỏ BM thẳng góc với CM. Nhận-xét gì về các mặt của hình tứ-diện $CAMB$?
2. Hạ AH thẳng góc với CB ; AK thẳng góc với CM. Chứnm-minh rằng AK thẳng góc với mặt phẳng CMB, và CB thẳng góc với mặt phẳng AKH. Nhận-xét gì về hình tứ-giác $HKMB$?

3. *A, M, B cố-định. C lưu-động trên Ax. Tìm quỹ-tích của K và H.*

4. *A, B, C cố-định. M lưu-động trên vòng O. Tìm quỹ-tích của đường thẳng AK và của K.*

5. *A, B, C cố-định. M lưu-động trên vòng O. Tìm vị-trí của M để cho thể-tích của hình tháp CAMB cực-đại.*

TOÁN

Cho hai nửa đường thẳng trực-giao Ax, By. AB thẳng góc với hai đường đó. Trên Ax, ta lấy một đoạn AM = x. Trên By, ta lấy một đoạn BN = y. Giả-sử MN = x + y. Đặt AB = a.

1. Định vị-trí của Ax đối với mặt phẳng (ABy). Tìm hệ-thức giữa x, y và a.

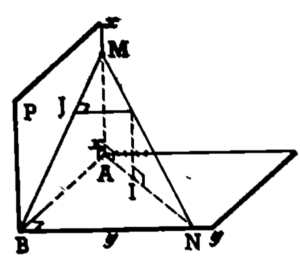
2. Hai mặt phẳng (ABx) và (ABy) có thẳng góc với nhau không?

3. Trên đoạn MN, ta lấy điểm H với MH = x. Hạ HI thẳng góc với mặt phẳng (ABy). Tính HI. Tính HJ, khoảng cách từ H tới mặt phẳng (ABx).

4. Chứng-tỏ rằng H nằm trong một mặt phẳng cố-định khi x, y thay đổi.

BÀI GIẢI

1. Vị-trí của Ax đối với mặt phẳng (ABy).



Hình 78

Ax thẳng góc với AB và trực-giao với By (theo giả-thiết), nên Ax thẳng góc với mặt phẳng ABy, định bởi hai đường đồng-qui AB và By.

Ta suy ra rằng Ax thẳng góc với AN một đường nằm trong mặt (ABy). Nói khác đi, MAN là tam-giác vuông góc ở A.

Hệ-thức giữa x, y và a.

Trong tam-giác vuông-góc MAN, định-lý Pythagore cho ta :

$$MN^2 = AM^2 + AN^2$$

Nhưng $\quad AN^2 = AB^2 + BN^2$

Cho nên $\quad MN^2 = AM^2 + AB^2 + BN^2$

hay là $\quad (x + y)^2 = x^2 + a^2 + y^2$

Ta suy ra $\quad 2\,xy = a^2$, tức là $\mathbf{xy} = \dfrac{\mathbf{a}^2}{\mathbf{2}}$

2. Vị-trí tỉ-đối của hai mặt phẳng (ABx) và (ABy).

Mặt phẳng (ABx) chứa Ax. Thế mà Ax thẳng góc với mặt phẳng (ABy). Vậy mặt (ABx) thẳng góc với mặt (ABy).

Tương-tự, ta cũng nói được rằng : mặt (MAN) thẳng góc với mặt (ABy), giao-tuyến là AN.

3. Trị-số của đoạn HI.

Vì mặt (MAN) thẳng góc với mặt (ABy), nên khi ta hạ HI thẳng góc với mặt (ABy) thì HI hoàn-toàn nằm trong mặt NMA, và I nằm trên AN.

Hai tam-giác đồng-dạng NHI và NMA cho ta :

$$\frac{HI}{MA} = \frac{NH}{NM} \quad \text{hay} \quad \frac{HI}{x} = \frac{y}{x + y}$$

Do đó $$\mathbf{HI} = \frac{\mathbf{xy}}{\mathbf{x + y}}$$

Trị-số của đoạn HI.

Ta hạ HJ thẳng góc với mặt (ABx). Tương-tự như ở phần trên, ta biết J nằm trên MB.

Hai tam-giác đồng-đạng MHJ và MNB cho ta :

$$\frac{HJ}{NB} = \frac{MH}{MN} \quad \text{hay} \quad \frac{HJ}{y} = \frac{x}{x + y}$$

Do đó $$\mathbf{HJ} = \frac{\mathbf{xy}}{\mathbf{x + y}}$$

4. H ở trên một mặt phẳng cố-định.

Ta biết $\quad HI = HJ = \dfrac{xy}{x + y}$

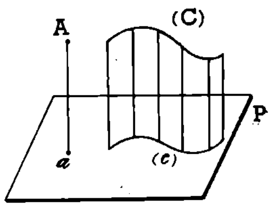
Điều đó tỏ rằng H cách đều hay mặt (ABx), (ABy). Vậy H nằm trên mặt phân-giác cố-định của nhị-diện vuông góc (x, AB, y).

12

Sự chiếu một đường thẳng

12. 1. ĐỊNH-NGHĨA.

Hình chiếu thẳng góc (hay trực-giao) của điểm A xuống mặt phẳng P là chân đường thẳng góc Aa hạ từ A xuống P *(h. 79).*



Hình 79

P gọi là *mặt chiếu*. A*a* gọi là *đường đầu ảnh*. Nếu không có gì nhầm lẫn, ta có thể thay danh-từ « hình chiếu thẳng góc » bằng « hình chiếu ».

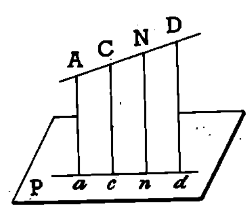
Nếu A ở ngoài P thì A không trùng với *a*. Nếu *a* ở trên P thì A trùng với *a*.

Một điểm A chỉ có một hình chiếu *a*. Nhưng một điểm *a* của P là hình chiếu của vô-số điểm A và những điểm A đó nằm trên đường *ax* thẳng góc với P.

Hình chiếu của một đường cong là quỹ-tích hình chiếu của mọi điểm của đường cong đó.

12. 2. ĐỊNH-LÝ.

Hình chiếu của một đường thẳng xuống một mặt phẳng thường thường là một đường thẳng.



Hình 80

Coi một đường thẳng định bởi hai điểm A, B. Giả-sử mặt chiếu P không thẳng góc với AB.

Lấy một điểm C trên AB, hình chiếu của A, B, C lần-lượt là *a*, *b*, *c*.

A*a* và B*b* định được một mặt phẳng Q thẳng góc với P. Vì thế, đường thẳng C*c* nằm trên Q. Do đó, *c* nằm trên *ab*.

Bây giờ lấy một điểm n trên ab. Đường thẳng góc nx với P, kẻ từ n, phải nằm trong mặt Q, Cc và nx song-song. Trong Q, Cc đã cắt AB nên nx phải cắt AB tại N.

Như vậy n là hình chiếu của N.

Xem thế, bất-cứ điểm C nào của AB cũng chiếu thành một điểm c của ab, và bất-cứ điểm n nào của ab cũng là hình chiếu của một điểm N lấy trên AB.

Vậy : hình chiếu của một đường thẳng thường là một đường thẳng.

Khi AB song-song với P thì nó song-song với hình chiếu của nó.

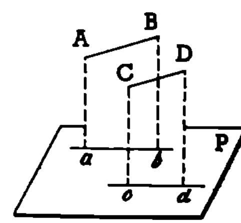
Khi AB thẳng góc với P thì hình chiếu của đường A chỉ là một điểm, đó là trường-hợp riêng.

12. 3. ĐỊNH-LÝ.

Hình chiếu của hai đường thẳng song-song xuống một mặt phẳng thường thường là hai đường thẳng song-song.

Coi hai đường thẳng song-song AB và CD không thẳng góc với mặt chiếu P (*h. 81*). Gọi hình chiếu của hai đường thẳng đó là ab và cd.

Coi hai mặt $AaBb$ và $CcDd$. Chúng song-song với nhau vì mặt nọ chứa hai đường thẳng đồng-qui song-song với hai đường thẳng đồng-qui của mặt kia (AB song-song với CD ; Aa song-song với Cc).



Hình 81

P cắt hai mặt song-song đó theo hai giao-tuyến ab và ad. Vậy ab và cd song-song với nhau.

Khi AB và CD cùng thẳng góc với P thì hình chiếu của chúng rút lại là hai điểm, đó là trường-hợp riêng.

(Nên chú-ý rằng định-lý đảo không đúng).

12. 4. CHÚ-Ý.

Có một đa-giác *phẳng* mà diện-tích là $\mathcal{S}$. Đem chiếu nó xuống một mặt phẳng, ta được một đa-giác mới mà diện-tích là $\mathcal{S}'$. Gọi α là góc phẳng của *nhị-diện nhọn* hợp bởi mặt đa-giác và mặt chiếu.

Ta có công-thức :

$$\boxed{\mathcal{S}' = \mathcal{S} \cdot \cos\alpha}$$

BÀI TẬP

12. 1. *Muốn chiếu một hình tam-giác ABC xuống một mặt phẳng thì phải làm thế nào? Chứng-minh rằng hình chiếu của một tam-giác ABC xuống hai mặt song-song thì bằng nhau.*

12. 2. *Cho một mặt phẳng nằm ngang H, trên đó có một điểm A'. Gọi A' như hình chiếu của một điểm A xuống H. Biết A' thì có tìm thấy A không? Biết* $A'A = +2$ *(hai đơn-vị) thì có tìm thấy A không? (Lấy chiều dương từ dưới lên trên).*

12. 3. *Cho một hình bình-hành ABCD và một mặt phẳng P. Chứng-minh rằng hình chiếu của hình bình-hành đó xuống P thường thường là một hình bình-hành A'B'C'D'. Chứng-minh rằng* $AA' + CC' = BB' + DD'$.

12. 4. *Cho một góc vuông ABC, và một mặt phẳng P. Giả-sử cạnh BA song-song với P*

1. Có thể nói gì về đường BA và hình chiếu B'A' của nó xuống P?

2. Chứng-minh rằng B'A' thẳng góc với mặt phẳng AA'C'C? (C' là hình chiếu của C xuống P). Suy ra rằng A'B'C' là một góc vuông.

12. 5. *Cho một tam-giác cân ABC* $(AB = AC)$*. Kẻ đường cao AH. Gọi P là một mặt phẳng chứa AH. Chiếu thẳng B và C xuống P thành B'C'. So-sánh BB' và CC'. Tam-giác AB'C' có phải là tam-giác cân không?*

12. 6. *1. Cho một góc vuông xOy. Một đoạn CD có chiều dài không đổi là 2d. C chạy trên Ox; D chạy trên Oy. Tìm quỹ-tích trung-điểm I của CD.*

2. Cho hai nửa đường thẳng trực-giao Ax, By; AB là đoạn thẳng góc chung, đặt $AB = a$*. Một điểm C chạy trên Ax; một điểm D chạy trên By, cho biết* $CD = 2l$ *(đoạn không đổi). Tìm quỹ-tích trung-điểm I của CD (nên chiếu xuống mặt trung-trung trực AB).*

TOÁN

Cho một hình vuông ABCD ở trong một mặt P. Kẻ bốn nửa đường thẳng cùng ở về một phía của mặt ABCD và thẳng góc với mặt ABCD. Một mặt phẳng Q cắt bốn đường đó ở A' B' C' D' (A' ứng với A v.v...).

1. **A'B'C'D' là hình gì?**

   Chứng-tỏ rằng $AA' + CC' = BB' + DD'$.

2. **Giả-sử** $AA' = BB'$**, A'B'C'D' là hình gì?**

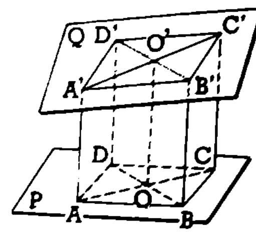
3. **Giả-sử** $AA' = CC'$**, chứng-minh rằng A'B'C'D' là hình thoi.**

BÀI GIẢI

1. Hình-tính của tứ-giác A'B'C'D'.

Bốn đường AA', BB', CC', DD' cùng thẳng góc với mặt phẳng P nên song-song với nhau.

Coi hai mặt phẳng AA'D'D và BB'C'C chúng song-song với nhau vì mặt nọ có chứa hai đường thẳng đồng-qui song-song với hai đường thẳng đồng-qui của mặt kia (AA' song-song với BB' ; AD song-song với BC, cạnh của hình vuông).



Hình 82

Mặt Q cắt hai mặt song-song nói trên theo hai giao-tuyến A'D' và B'C', nên A'D' song-song với B'C'.

Tương-tự, A'B' song-song với D'C'.

Tứ-giác A'B'C'D' có các cạnh song-song đôi một, nên nó là một hình bình-hành.

Hệ-thức AA' + CC' = BB' + DD'.

Gọi O, O' là tâm đối-xứng của hình vuông ABCD và của hình bình-hành A'B'C'D'.

Trong hình thang AA'C'C, OO' là đáy trung-bình cho nên :

$$OO' = \frac{AA' + CC'}{2} \qquad (1)$$

Trong hình thang BB'D'D, OO' là đáy trung-bình cho nên :

$$OO' = \frac{BB' + DD'}{2} \qquad (2)$$

So-sánh hai hệ-thức (1) và (2), ta có :

$$AA' + CC' = BB' + DD'$$

2. Hình-tính của tứ-giác A'B'C'D' khi AA' = BB'.

Khi AA' = BB' thì A'B' song-song với AB. BB' thẳng góc với mặt P nên BB' thẳng góc với AB, một đường ở trong P.

AB vừa thẳng góc với BC, vừa thẳng góc với BB', nên AB thẳng góc với mặt phẳng BB'CC' định bởi hai đường đồng-qui BC và BB'.

Suy ra AB trực-giao với B'C'.

Thế mà A'B' song-song với AB.

Vì thế A'B' thẳng góc với B'C'.

Hình bình-hành A'B'C'D' có một góc vuông ($\widehat{A'B'C'} = 90^\circ$) nên nó là một hình chữ-nhật.

3. Hình-tính của tứ-giác A'B'C'D' khi AA' = CC'.

Khi AA' = CC' thì A'C' song-song với AC tức là O'C' song-song với OC. Theo giả-thiết thì CC' thẳng góc với P. Vì OO' song-song với CC' nên OO' cũng thẳng góc với P. Do đó, OO' thẳng góc với OC.

OC vừa thẳng góc với OO', vừa thẳng góc với OB (tính-chất đường chéo của hình vuông) nên OC thẳng góc với mặt phẳng BOO', tức là mặt phẳng BOO'B'.

Ta suy ra rằng OC trực-giao với O'B'.

Thế mà O'C' song-song với OC, nên O'C' thẳng góc với O'B'.

Hình bình-hành A'B'C'D có hai đường chéo thẳng góc nhau, vậy nó là một hình thoi.

13

Góc của một đường thẳng và một mặt phẳng

13. 1. ĐỊNH-NGHĨA.

Góc của một đường thẳng và một mặt phẳng là góc nhọn tạo bởi đường đó và hình chiếu của nó xuống mặt phẳng.

Trường-hợp riêng 1. Nếu đường D song-song với mặt P thì góc của D và P là 0°.

Trường-hợp riêng 2. Nếu đường D thẳng góc với mặt P thì hình chiếu của D là một điểm ; tuy nhiên, ta cứ nói : Góc của D và P là 90°, vì D thẳng gọc với mọi đường thẳng ở trong P đi qua chận nó.

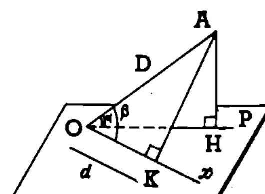
13. 2. ĐỊNH-LÝ.

Góc của một đường thẳng và một mặt phẳng thì nhỏ hơn góc của đường thẳng đó với bất cứ đường nào kẻ trong mặt phẳng không song-song với hình chiếu của đường nói trên,

Đường thẳng D cắt mặt phẳng P tại O.

Lấy một điểm A trên D, rồi hạ AH thẳng góc với P.

Gọi d là một đường thẳng bất kỳ trong P và không song-song với hình chiếu OH của D.



Hình 83

Góc nhọn $\widehat{AOH} = \alpha$ là góc của D và P.

Kẻ Ox song-song với d, Ox đựng trong P. Hạ AK thẳng góc với Ox. Góc nhọn AOK = β là góc của D và d.

Tay hãy chứng-minh rằng $\alpha < \beta$.

Hai tam-giác vuông góc AOH và AOK cho ta:

$$\sin \alpha = \frac{AH}{OA} \quad ; \quad \sin \beta = \frac{AK}{OA}$$

Nhưng vì AH < AK (đoạn thẳng góc và đoạn xiên đối với mặt phẳng P) nên ta suy ra:

$$\frac{AH}{OA} < \frac{AK}{OA}$$

hay $\sin \alpha < \sin \beta$

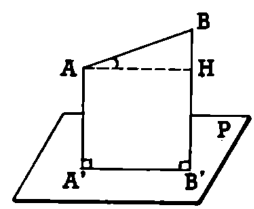
(α và β là hai góc nhọn). Do đó $\alpha < \beta$.

Chú-ý. **tg α = p gọi là độ dốc của D đối với P.**

13. 3. ỨNG-DỤNG.

Cách tính chiều dài hình chiếu của một đoạn xuống một mặt phẳng.

Một đoạn AB chiếu xuống mặt phẳng P thành A'B'. Gọi góc của đường thẳng AB với mặt P là α. Ta hãy tính A'B' theo AB và α *(h. 84)*.



Hình 84

Hạ AH thẳng góc với BB'. Tam-giác vuông góc AHB cho ta:

$$AH = AB \cdot \cos \alpha$$

Nhưng AH = A'B' (chữ-nhật AHB'A')

nên $\boxed{A'B' = AB \cdot \cos \alpha}$

BÀI TẬP

13. 1. *Cho một góc nhọn xOy. P là một mặt phẳng chứa Oy mà không chứa Ox. Trên Ox, ta lấy một điểm A, và chiếu A xuống P thành A'. Trên Oy, ta lấy một điểm B sao cho OB = OA'.*

So-sánh hai tam-giác AOB và AOA'. Kết-luận gì về hai góc $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOA'}$? Tìm lại định-lý đã học trong bài.

13. 2. *Cho một góc xOy ở trong mặt phẳng P. Ta kẻ đường phân-giác Oz của góc đó rồi vẽ mặt phẳng Q chứa Oz và thẳng góc với P. Gọi A là một điểm ở trong Q. Chứng-tỏ rằng đường OA tạo với Ox, Oy những góc bằng nhau.*

13. 3. *Cho một tam-giác đều ABC. Một mặt phẳng P chứa BC nhưng không chứa A. Giả-sử hình chiếu của ABC là một tam-giác A'BC vuông góc ở A'. Hãy tính góc của đường cao AH và của cạnh AC với mặt P.*

13. 4. *Cho một hình vuông ABCD mà cạnh là a. Trên đường thẳng góc với mặt hình vuông kẻ từ A, ta lấy đoạn AS bằng AB.*

1. *Tính góc của SB, SC, SD với mặt hình vuông.*
2. *Tính diện-ttích toàn-phần của hình tháp SABCD (theo a).*

TOÁN

Trong một mặt phẳng P, cho một góc xOy. Gọi Oz là một nửa đường thẳng phát-xuất từ O và không nằm trong P. Trên Oz, ta lấy một điểm A. Chiếu thẳng điểm A xuống mặt P thành A', xuống Ox thành M, xuống Oy thành N.

1. **Tính trị-số của mỗi góc $\widehat{OMA'}$, $\widehat{ONA'}$.**

2. **Cho biết $\widehat{xOz} = \widehat{yOz} = \alpha$ (α là một góc nhọn).**

Chứng-tỏ rằng OA' là đường phân-giác của góc $\widehat{xOy}$.

3. **Vẫn cho $\widehat{xOy} = \widehat{yOz} = \alpha$ (α nhọn) và cho thêm $\widehat{xOy} = 90^o$. Gọi góc của đường thẳng Oz với mặt P là β. Chứng-tỏ rằng.**

$$\cos\beta = \sqrt{2}\,.\,\cos\alpha$$

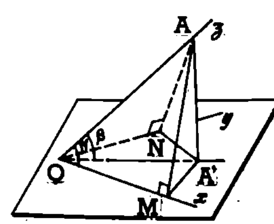
Khi $\alpha = 60^o$ thì β là bao nhiêu?

BÀI GIẢI

1. Trị-số của mỗi góc OMA', ONA'.

AA' thẳng góc với mặt phẳng P nên AA' trực-giao với mọi đường thẳng dựng trong P. Nói riêng ra, AA' trực-giao với OM, ON và thẳng góc với OA'.

OM vừa thẳng góc với AM, vừa trực-giao với AA' nên OM thẳng góc với A'M, cạnh thứ ba của tam-giác AA'M.



Hình 85

Nói khác đi, góc $\widehat{OMA'}$ là một góc vuông.

Tương-tự, góc $\widehat{ONA'}$ cũng là một góc vuông.

2. Đường phân-giác của góc $\widehat{xOy}$.

Coi hai tam-giác vuông góc AOM và AOH. Chúng có cạnh huyền OA chung và góc nhọn ở O bằng nhau ($\widehat{xOz} = \widehat{yOz}$ theo giả-thiết). Vậy chúng bằng nhau và ta suy ra OM = ON.

Coi hai tam-giác vuông góc A'OM và A'ON. Chúng có cạnh huyền OA' chung và OM = ON. Vậy chúng bằng nhau và ta suy ra $\widehat{MOA'} = \widehat{NOA'}$,

Do đó, OA' là đường phân-giác trong của góc $\widehat{xOy}$.

3. Hệ-thức giữa α và β.

Góc của đường OA với mặt P là góc nhọn hợp bởi OA và hình chiếu OA' của nó xuống P. Vậy $\widehat{AOA'} = \beta$.

Trong tam-giác vuông góc AOA', ta có :

$$\cos\beta = \frac{OA'}{OA}$$

Trong tam-giác vuông góc AOM, ta có :

$$\cos\alpha = \frac{OM}{OA}$$

Suy ra
$$\frac{\cos\beta}{\cos\alpha} = \frac{OA'}{OA} : \frac{OM}{OA} = \frac{OA'}{OM}.$$

Theo giả-thiết thì $\widehat{xOy} = 90^o$. Tứ-giác phẳng OMA'N có ba góc vuông ở O, M. N và hai cạnh liên-tiếp bằng nhau, nên nó là một hình vuông và ta suy ra

$$OA' = OM\sqrt{2}$$

Vậy $$\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{OA'}{OM} = \frac{OM\sqrt{2}}{OM} = \sqrt{2}$$

Và $$\cos \beta = \sqrt{2}.\cos \alpha$$

Khi $\alpha = 60^o$ thì $\cos \alpha = 1/2$, do đó:

$$\cos \beta = \sqrt{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^o.$$

β là góc nhọn, ta suy ra $\beta = 45^o$.

14

Phép đối-xứng

14. 1. ĐỊNH-NGHĨA.

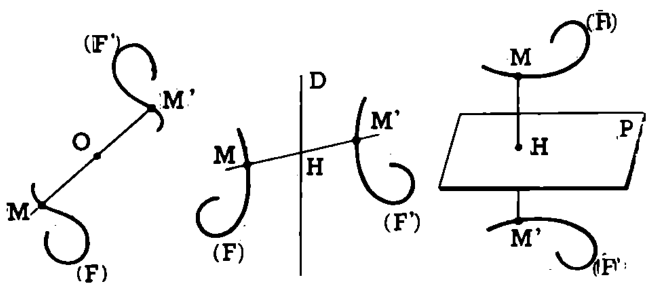
1. PHÉP ĐỐI-XỨNG QUA MỘT ĐIỂM.

Cho một điểm cố-định O. Gọi M là một điểm bất-kỳ. Nối MO rồi kéo dài một đoạn OM' = MO (*h. 86*).

M' gọi là *điểm đối-xứng* của M qua *tâm* O. O là **tâm đối - xứng.**

Hai điểm M, M' gọi là đối-xứng nhau qua tâm O khi O là trung-điểm của đoạn MM'.

Nếu M vạch nên một hình (F) thì M vạch nên một hình (F'). (F') gọi là hình *đối-xứng* của (F) qua tâm O.



Hình 86

2. PHÉP ĐỐI-XỨNG QUA MỘT TRỤC.

Cho một đường thẳng cố-định D. Gọi M là một điểm bất-kỳ. Hạ MH thẳng góc với D rồi kéo dài MH một đoạn HM' = MH (*h. 86*).

M' gọi là *điểm đối-xứng* của M qua *trục* D. D là **trục đối-xứng.**

Hai điểm M, M' gọi là đối-xứng nhau qua trục D khi D là đường trung-trực của đoạn MM'.

Nếu M vạch nên một hình (F thì M' vạch nên một hình (F'). (F') gọi là hình *đối-xứng* của (F) qua trục D.

3. PHÉP ĐỐI-XỨNG QUA MỘT MẶT PHẲNG.

Cho một mặt phẳng cố-định P. Gọi M là một điểm bất-kỳ. Hạ MH thẳng góc với P rồi kéo dài một đoạn HM' = MH (*h. 86*).

M' gọi là *điểm đối-xứng* của M qua mặt P ; P gọi là **mặt đối-xứng.**

Hai điểm M, M' gọi là đối-xứng nhau qua mặt phẳng P khi P là mặt trung-trực của đoạn MM'.

Nếu M vạch nên một hình (F) thì M' vạch nên một hình (F'). (F') gọi là hình *đối-xứng* của (F) qua mặt P.

14. 2. ĐIỂM KÉP CỦA PHÉP ĐỐI-XỨNG.

Trong mỗi phép đối-xứng đã nói trên, *nếu M' trùng với M* thì ta nói rằng *M là một điểm kép.*

Trong phép đối-xứng qua điểm O, chỉ có O là điểm kép mà thôi.

Trong phép đối-xứng qua trục D, có vô-số điểm kép nằm trên D.

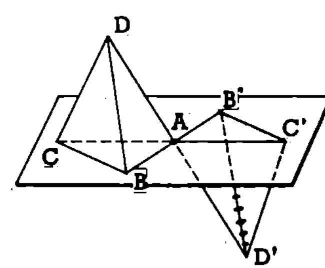
Trong phép đối-xứng qua mặt P, có vô-số điểm kép nằm trên P.

14. 3. HÌNH ĐỐI-XỨNG NHAU.

Những điều ta nói sau đây có giá-trị trong Hình-học không-gian :

1. **Hai hình đối-xứng nhau qua một điểm không thể chồng khít lên nhau được.**

Đã không chồng khít, chúng không được coi là bằng nhau. Coi hai tứ-diện ABCD và AB'C'D' đối-xứng nhau qua A, chúng có các phần-tử bằng nhau (cạnh, góc, mặt v.v...) nhưng không thể chồng khít lên nhau được.



Hình 87

2. **Hai hình đối-xứng nhau qua một trục có thể chồng khít lên nhau được.**

Thật vậy, người ta có thể để (F) chồng khít lên (F') bằng một phép quay 180° quanh trục đối-xứng.

3. **Hai hình đối-xứng nhau qua một mặt phẳng không chồng khít lên nhau được.**

Thí-dụ : Qua mặt gương phẳng, hình của tay trái là tay phải.

14. 4. TÂM, TRỤC, MẶT ĐỐI-XỨNG CỦA MỘT HÌNH.

1. Khi thực-hiện phép đối-xứng qua một điểm O, mà hình (F) biến ngay thành chính nó thì ta nói rằng (F) nhận điểm O làm tâm đối-xứng.

Thí-dụ: Tâm của một hình cầu là tâm đối-xứng của của hình đó.

2. Khi thực-hiện phép đối-xứng qua một đường thẳng D, mà hình (F) biến ngay thành chính nó thì ta nói rằng (F) nhận đường thẳng D làm trục đối-xứng.

Thí-dụ : Đường cao của một tam-giác cân là trục đối-xứng của tam-giác đó.

3. Khi thực-hiện phép đối-xứng qua một mặt phẳng P, mà hình (F) biến ngay thành chính nó thì ta nói rằng (F) nhận mặt phẳng P làm mặt đối-xứng.

Thí-dụ: Mặt phân-giác của một nhị-diện là mặt đối-xứng của nhị-diện đó.

BÀI TẬP

14. 1. *Chứng-minh rằng điểm đối-xứng của trực-tâm H của một tam-giác ABC qua các cạnh thì ở trên vòng ngoại-tiếp với tam-giác đó.*

Gọi O là tâm vòng, R là bán-kính vòng, A' là đối-xứng của H qua BC. Chứng-minh rằng : $OH^2 = R^2 + \overline{HA} \times \overline{HA'}$.

14. 2. *Cho một tam-diện ba góc vuông Sxyz. Cắt tam-diện bằng một mặt phẳng thì được một thiết-diện tam-giác ABC. Chiếu thẳng điểm S xuống mặt ABC thành H. Chứng-minh rằng :*

1. *H là trực-tâm của tam-giác ABC.*
2. $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2}$.

14. 3. *Cho một hình vuông ABCD, cạnh a. Trên đường thẳng góc với mặt phẳng ABCD, kẻ từ A, lấy AS = a. Coi hình tháp SABCD.*

1. *Chứng-tỏ rằng SAC là mặt phẳng đối-xứng của hình tháp SABCD.*
2. *Chứng-tỏ rằng các mặt SAD, SAB, SBC, SDC là những tam-giác vuông góc*
3. *Tính diện-tích toàn-phần của hình tháp SABCD.*
4. *Tính số đo của hai nhị-diện cạnh (AB) và cạnh (SC).*

14.4. 1. *Cho một hình tứ-diện ABCD, trong đó $AB = CD$, $AC = BD$. So-sánh hai tam-giác ABC, BCD. So-sánh hai tam-giác ABC, ACD. Gọi I, J là trung-điểm của AD, BC. Có thể nói gì về hai tam-giác BCI, ADI ?*

Góc của IJ với AD và BC là bao nhiêu ?

2. *Cho một đoạn IJ. Trên một đường thẳng góc với IJ kẻ từ I, lấy $IA = ID$. Trên một đường thẳng góc với IJ kẻ từ J, lấy $JC = JB$.*

Giả sử AD không song-song với BC. Chứng-tỏ rằng $AB = CD$ và $AC = BD$ bằng cách dùng sự đối-xứng qua một đường thẳng.

14.5. *Cho một tứ-diện SABC, trong đó $SA = SB = SC = a$ và $\widehat{ASB} = 90^\circ$, $\widehat{ASC} = \widehat{CSB} = 60^\circ$.*

1. *Tính các cạnh của tam-giác ABC.*
2. *Chứng-tỏ rằng SC và AB trực-giao với nhau.*
3. *Tìm những mặt trung-trực của AB và SC. Tìm những mặt đối-xứng của tứ-diện SABC.*
4. *Tìm một trục đối-xứng của tứ-diện SABC.*

TOÁN

Cho hai tam-giác cân MAB, PAB, đáy chung là $AB = 2a$, chiều cao là $MI = PI = x$. Số đo nhị-diện (M, AB, P) là 60°.

1. Chứng-tỏ rằng AB và PM trực-giao với nhau. Gọi J là trung-điểm của PM, chứng-tỏ rằng IJ thẳng góc với AB, MP, và IJ là trục đối-xứng của hình tứ-diện ABMP.

Tính IJ theo x.

2. Tính theo a và x, thể-tích của khối tứ-diện ABMP và vẽ đường biểu-diễn sự biến-thiên của thể-tích đó khi x thay đổi (a không đổi).

3. Tìm một góc phẳng của nhị-diện (A, MP, B). Tính x theo a để cho số đo của diện đó — là 90°.
— là 60°.

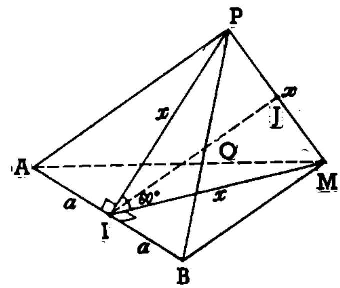
Trong trường-hợp số đo của nhị-diện nói trên là 60°, tìm tâm hình cầu ngoại-tiếp của tứ-diện ABMP.

BÀI GIẢI

1. Phương của AB và PM.

AB thẳng góc với hai cạnh PI và MI của tam-giác PIM, nên AB trực-giao với PM, cạnh thứ ba của tam-giác đó.

Cũng vì AB thẳng góc với mặt phẳng PIM nên AB thẳng góc với IJ, một đường nằm trong mặt đó và đi qua I. PIM là một tam-giác cân đỉnh I, trung-tuyến IJ đồng-thời là đường cao, nghĩa là IJ thẳng góc với PM.



Hình 88

Tóm lại, IJ là đoạn thẳng góc chung và đường trung-trực chung của AB và PM.

Trục đối-xứng của tứ-diện ABMP.

IJ là trung-trực của đoạn PM; như thế, P và M đối-xứng với nhau qua đường IJ.

IJ cũng là trung-trực của đoạn AB ; như thế, A và B đối-xứng với nhau qua đường IJ.

Vậy, IJ là trục đối-xứng của tứ-diện ABMP.

Chú-thích. Tứ-diện ABMP còn có hai mặt đối-xứng là PIM và AJB.

Trị-số của IJ.

$\widehat{PIM}$ là một góc phẳng của nhị-diện (M, AB, P). Vì thế ta có $\widehat{PIM} = 60^o$ (theo giả-thiết, số đo của nhị-diện là 60^o). PIM là một tam-giác cân, nay có một góc bằng góc 60^o, nên nó thành một tam-giác đều mà cạnh là x. Suy ra

$$IJ = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

2. Thể-tích của khối ABMP.

Thể-tích v của khối AIMP là :

$$v = \frac{1}{3} AI \times dt\ (PIM) \quad [dt : \text{diện-tích}]$$

$$= \frac{1}{3} a \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{ax^2\sqrt{3}}{12}$$

Thể-tích $\mathcal{V}$ của khối ABMP là $\mathcal{V} = 2v$.

tức là $$\mathcal{V} = \frac{ax^2\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{6} x^2$$

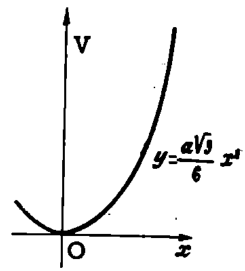
Đó là một hàm-số bậc hai của x. Khi x biến-thiên từ 0 đến $+\infty$, thì $\mathcal{V}$ đồng-biến từ 0 đến $+\infty$.

Đường biểu-diễn là một nửa parabol như ở trong đồ-thị sau đây.

3. Góc phẳng của nhị-diện (A, MP, B).

Hai tam-giác cân PAB, MAB bằng nhau, cạnh đáy là $AB = 2a$, các cạnh còn lại là $PA = MA = PB = MB = \sqrt{a^2 + x^2}$.

Trong tam-giác cân PBM, (đỉnh B), trung-tuyến BJ cũng là đường cao, nghĩa là BJ thẳng góc BM. Tương-tự, AJ thẳng góc với BM.



Hình 89

Như thế góc $\widehat{BJA}$ là một góc phẳng của nhị-diện (A, MP, B).

Một *điều-kiện ắt có và đủ* để $\widehat{BJA} = 90^o$ là $JI = \dfrac{AB}{2}$ (dùng tam-giác cân AJB) tức là :

$$\frac{x\sqrt{3}}{2} = a \qquad \text{suy ra} \qquad x = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

Một *điều-kiện ắt có và đủ* để $\widehat{BJA} = 60^o$ là $IJ = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2}$ (dùng tam-giác đều AJB) tức là :

$$\frac{x\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3} \qquad \text{suy ra} \qquad x = 2a$$

Tâm của hình cầu (qua bốn điểm ABMP).

Ta gọi O là trung-điểm của đoạn IJ.

IJ là trung-trực của AB và PM. O ở trên IJ nên $OA = OB$ và $OP = OM$.

Hai tam-giác vuông góc OIA và OJP bằng nhau vì $IA = a = JP$ và $OI = OJ$.

Ta suy ra $\quad OA = OP$

Như thế thì $OA = OB = OP = OM$.

Vậy O chính là tâm của hình cầu ngoại-tiếp của tứ-diện ABMP.

TOÁN

Một đường thẳng x'x thẳng góc với một mặt phẳng P cố-định tại điểm S cố-định. Trong P, có một đường thẳng cố-định y'y không qua S. Ta coi góc vuông đỉnh S quay quanh S và nằm trong P. Hai cạnh của góc đó cắt y'y tại B, C.

1. Gọi A là một điểm cố-định trên x'x. Có nhận-xét gì về hình tam-diện SABC ? Chứng-tỏ rằng :

$AB^2 + AC^2 - BC^2$ là một hằng-số.

2. Hạ SH thẳng góc với mặt phẳng ABC. Chứng-minh rằng H là trực-tâm của tam-giác ABC.

3. Gọi B' và C' là chân những đường cao kẻ từ B và C của tam-giác ABC. Quỹ-tích của B', C'.

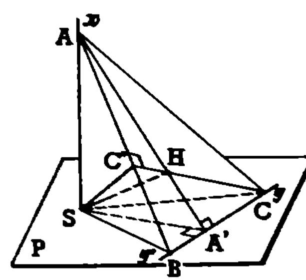
4. Gọi K là điểm đối-xứng của H qua y'y. K có nằm trên vòng ABC không ? Quỹ-tích của tâm vòng ABC.

BÀI GIẢI

1. Hình-tính của tam-giác SABC.

AS thẳng góc với mặt phẳng P tại S nên AS thẳng góc với SB, SC (hai đường thẳng nằm trong P và đi qua S). $\widehat{BSC} = 90^\circ$ theo giả-thiết.

Ta suy ra rằng SABC là một tam-diện ba góc vuông.



Hình 90

Biểu-thức $AB^2 + AC^2 - BC^2$.

Áp-dụng định-lý Pythagore vào ba tam-giác vuông góc ASB, ASC, BSC, ta có :

$$AB^2 = AS^2 + SB^2$$

$$AC^2 = AS^2 + SC^2$$

$$BC^2 = AS^2 + SC^2$$

Do đó $AB^2 + AC^2 - BC^2 = 2\ AS^2$ (= hằng-số).

2. Trực-tâm của tam-giác ABC.

Khi ta hạ SH thẳng với mặt phẳng ABC thì H là điểm cố-định (vì S, A và $y'y$ cố-định). Ta hãy chứng-minh rằng H là trực-tâm của tam-giác ABC.

SH thẳng góc với (ABC) nên SH trực-giao với BC.

AS thẳng góc với (SBC) nên AS trực-giao với BC.

BC vừa trực-giao với SH, vừa trực-giao với AS, nên BC thẳng góc với mặt phẳng ASH (định bởi hai đường đồng-qui AS, SH) tại một điểm mà ta gọi là A'.

Do đó, BC thẳng góc với AH (hay AA'). Nói khác đi, AH là một đường cao của tam-giác ABC.

Ta nối CH, cắt AB ở C'. Chứng-minh giống trên, ta biết rằng CH (hay CC') là một đường cao của tam-giác ABC.

H là giao-điểm của hai đường cao trong tam-giác ABC, nên H là trực-tâm của ABC.

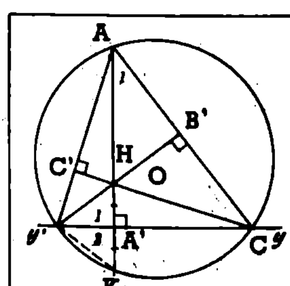
3. Quỹ-tích của B' và C'.

Trong mặt phẳng $Ay'y$, hai điểm B' và C' nhìn đoạn AH cố-định dưới một góc vuông. Quỹ-tích chung của B' và C' là vòng tròn đường kính AH dựng trong mặt phẳng $Ay'y$.

Ta nên nhận-xét rằng khi C tiến tới A' thì B tiến ra xa vô-cực, C' tiến tới A, và B' tiến tới H.

4. Vị-trí của K.

Ta gọi K là điểm đối-xứng của H qua BC (tức là qua $y'y$). Ta có $\widehat{B_1} = \widehat{A_1}$ (góc nhọn có cạnh thẳng góc), $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$ (đối-xứng qua $y'y$). Suy ra $\widehat{B_2} = \widehat{A_1}$. Tứ-giác chéo BKAC có hai góc đối bằng nhau, vậy nó nội-tiếp được trong một vòng tròn. Nói khác đi, vòng tròn O đi qua A, B, C cũng phải đi qua K.



Hình 91

Quỹ-tích của O.

A và H cố-định, $y'y$ cũng cố-định.

K là điểm đối-xứng của H qua $y'y$ nên cũng cố-định.

Vòng tròn O lưu-động trong mặt phẳng $Ay'y$ và qua hai điểm cố-định A, K. O cách đều A và K nên quỹ-tích của O là đường trung-trực của đoạn AK, dựng trong mặt phẳng $Ay'y$.

15

Hình lăng-trụ

15. 1. ĐỊNH-NGHĨA.

1. Mặt lăng-trụ là mặt gây nên bởi một đường thẳng Δ chuyển-động theo hai điều-kiện :

— Δ song-song với một phương d.

— Δ dựa vào một đa-giác phẳng (G).

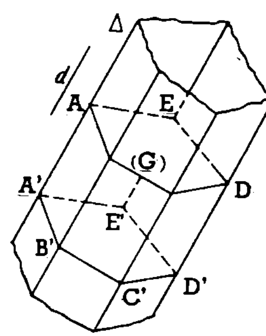
Mặt phẳng của (G) tức ABCDE không chứa *d* và không song-song với *d*.

Δ gọi là đường sinh. (G) gọi là đường chuẩn.

Những đường như AA' gọi là *cạnh*.

Những giải như (AA', BB') gọi là *mặt*.

2. Dùng một mặt phẳng không song-song với *d* để cắt mặt lăng-trụ thì được một thiết-diện phẳng.



Hình 92

Dùng một mặt phẳng *thẳng góc với d* để cắt mặt lăng-trụ thì được một thiết-diện thẳng.

3. Hình lăng-trụ là cố-thể giới-hạn bởi một mặt lăng-trụ và hai thiết-diện phẳng song-song.

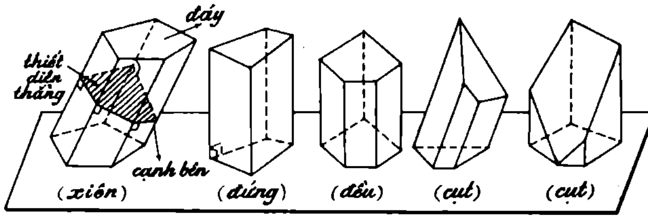
Hai thiết-diện gọi là *đáy. Mỗi mặt bên* là một hình bình-hành. Những đoạn như AA' gọi là *cạnh bên.*

Khoảng-cách giữa hai đáy gọi là *chiều cao.*

4. Hình lăng-trụ đứng là một hình lăng-trụ trong đó các cạnh bên thẳng góc với đáy. Mỗi mặt bên là một hình chữ-nhật.

5. Hình lăng-trụ đều là một hình lăng-trụ đứng trong đó đáy là một hình đa-giác lồi đều. Các mặt bên là những hình chữ-nhật bằng nhau.

6. **Hình lăng-trụ cụt là một cố-thể giới-hạn bởi một mặt lăng-trụ và hai thiết-diện phẳng không song-song. Mỗi mặt bên là một hình thang (đôi khi là tam-giác).**



Hình 93

15. 2. ĐỊNH-LÝ.

Hai thiết-diện phẳng song-song của một mặt lăng-trụ là hai đa-giác bằng nhau.

Các cạnh bên như AA', BB'... bằng nhau vì chúng là những đoạn song-song chắn bởi hai mặt phẳng song-song (*h. 92*).

Do đó, các mặt như ABB'A là những hình bình-hành. Suy ra AB = A'B', BC = B'C' v.v...

Hai góc như $\widehat{ABC}$ và $\widehat{A'B'C'}$ v.v... có cạnh song-song cùng chiều nên bằng nhau.

Do đó, hai đa-giác ABCDE và A'B'C'D'E' bằng nhau vì nó các cạnh bằng nhau đôi một, kề những góc bằng nhau đôi một.

Ta có thể mang hình ABCDE đến chồng khít với hình A'B'C'D'E' bằng phép tịnh-tiến theo vectơ AA'.

15. 3. HỆ-LUẬN.

Hai thiết-diện thẳng của một mặt lăng-trụ là hai đa-giác bằng nhau.

Thật vậy, hai thiết-diện thẳng ắt phải song-song.

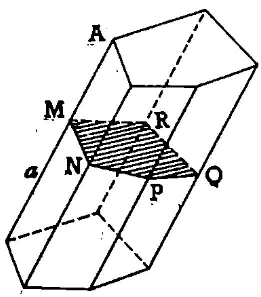
Hai thiết-diện thẳng song-song phải bằng nhau theo định-lý trên.

15. 4. ĐỊNH-LÝ.

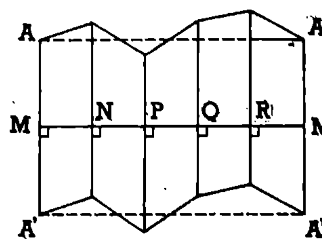
Diện-tích xung-quanh của một hình lăng-trụ bằng tích-số một cạnh bên với chu-vi một thiết-diện thẳng.

Coi hình lăng-trụ ABCDE A'B'C'D'E', gọi thiết-diện *thẳng* là MNPQR. Những đoạn như MN thẳng góc với cạnh bên AA', BB' v.v... Ta rạch hình lăng-trụ theo cạnh bên AA' rồi giải ra trên một mặt phẳng. Như thế gọi là *khai-triển* bề mặt xung-quanh của hình lăng-trụ.

Diện-tích xung-quanh của hình lăng-trụ bằng tổng-số diện-tích những hình bình-hành như ABB'A'.



Hình 94a



Hình 94b

Gọi chiều dài cạnh bên AA' là *a*, diện-tích xung-quanh $\mathcal{S}_{xq}$ của hình lăng-trụ là :

$$\mathcal{S}_{xq} = a \, . \, MN + a \, . \, NP + a \, . \, PQ + a \, . \, QR + a \, . \, RM$$
$$= a\,(MN + NP + PQ + QR + RM) = a \times (\text{chu-vi } MNPQR)$$

Gọi chu-vi của thiết-diện thẳng là *c*, ta được :

$$\mathcal{S}_{xq} = a \, . \, c$$

15. 5. HỆ-LUẬN.

Khi ta gặp một hình lăng-trụ đứng thì cách tính diện-tích xung-quanh rất đơn-giản :

Diện-tích xung-quanh của hình lăng-trụ đứng bằng tích-số chu-vi đáy với chiều dài một cạnh bên (tức chiều cao)

BÀI TẬP

15. 1. *Coi một mặt lăng-trụ mà đường chuẩn là hình bình-hành ABCD. Một mặt phẳng P cắt bốn cạnh bên của mặt lăng-trụ tại A'B'C'D'.*

1. Chứng-tỏ rằng A'B'C'D' là bốn đỉnh của một hình bình-hành. Ta gọi tâm của hình bình-hành này là O'.

2. Gọi tâm của hình bình-hành ABCD là O. Có thể nói gì về phương của OO' và các cạnh của mặt lăng-trụ ?

15. 2. *Cho một hình vuông ABCD. Từ các đỉnh, kẻ những đường thẳng góc với mặt của hình vuông. Như thế, ta được một mặt lăng-trụ (L). Trên DA, kéo dài về phía A, lấy một đoạn AI = a. Trên CB, kéo dài về B, lấy một đoạn BJ = b. Một mặt phẳng IJ cắt (L) theo một tứ-giác $A_1B_1C_1D_1$ (bốn chữ đó ứng với bốn chữ ABCD theo thứ-tự).*

1. *$A_1B_1C_1D_1$ là hình gì ?*

2. *Chứng-minh rằng* $\dfrac{AA_1}{a} = \dfrac{BB_1}{b}$.

3. *Gọi trị-số chung của hai tỉ-số đó là k, giả-sử AB = 1, tính các cạnh của tứ-giác $A_1B_1C_1D_1$.*

15. 3. *Cho một hình lăng-trụ đứng, đáy tam-giác ABC A'B'C'. Cho biết* $AB = AC = 1$, $BC = \sqrt{3}$, $AA' = BB' = CC' = 3$. *Trên BB', lấy đoạn* $BD = x$ $(x < 3)$. *Trên CC', lấy đoạn* $CE = y$ $(y < 3)$.

1. *Tính theo x và y những cạnh của tam-giác ADE.*

2. *Giả-sử* $x = \dfrac{11}{4}$, *tính y để cho tam-giác ADE vuông góc ở E.*

3. *x và y không đặc-sắc, tìm hệ-thức giữa x, y để cho tam-giác ADE vuông góc ở A. Tính y theo x ; x có thể biến-thiên trong khoảng nào ?*

TOÁN

Người ta coi một mặt lăng-trụ L. Khi nó cắt bằng một mặt phẳng P thẳng góc với các cạnh bên thì thiết-diện là một hình chữ nhật ABCD, cạnh là AB = 2a, AD = a.

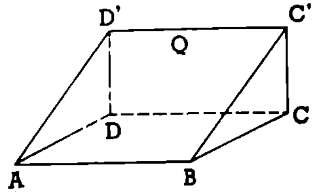
1. Một mặt phẳng Q chứa AB cắt mặt lăng-trụ L theo một hình ABC'D'. Chứng-tỏ hình đó là một hình chữ-nhật. Tính CC' để cho hình chữ-nhật đó là hình vuông.

2. Một mặt phẳng R đi qua A cắt mặt lăng-trụ L theo hình AB'C'D'. AB'C'D' là hình gì ? Người ta lấy cùng một chiều dương cho các cạnh bên của L. Biết rằng $\overline{CC'} = x$, hãy tính $\overline{BB'}$ và $\overline{DD'}$ khi AB'C'D' là một hình thoi. Định x để hình thoi AB'C'D' nằm hẳn về một bên của phẳng P.

BÀI GIẢI

1. Hình-tính của tứ-giác ABC'D'.

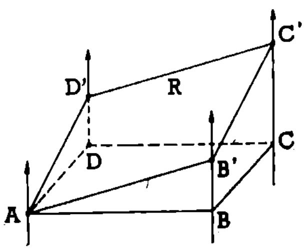
Hai mặt phẳng ADD' và BCC' song-song với nhau vì mặt nọ chứa hai đường thẳng đồng-qui song-song với mặt kia : AD song-song với BC ; DD' song-song với CC'.



Hình 95

Mặt phẳng Q cắt hai mặt song-song nói trên, nên hai giao-tuyến AD', BC' song-song với nhau.

Hơn nữa, mặt phẳng Q chứa AB và AB song-song với mặt phẳng DCC'D'. Q cắt mặt đó theo đường D'C', nên D'C' song-song với AB.



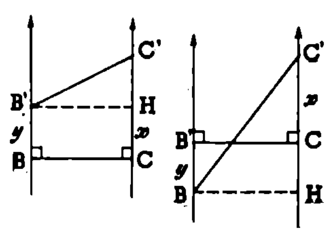
Hình 96

Tứ-giác ABC'D' có những cạnh song-song đôi một, nó là một hình bình-hành.

AB thẳng góc với BC và trực-giao với CC' nên AB thẳng góc với BC', cạnh thứ ba của tam-giác BCC'.

Hình bình-hành ABC'D' có một góc vuông, nên nó là một hình chữ-nhật.

Một chiều của chữ-nhật là AB $= 2a$, chiều kia là BC'. Một *điều-kiện ắt có và đủ* để hình chữ-nhật ABC'D' trở thành hình vuông là BC' $= 2a$.



Hình 97

Tam-giác vuông góc BCC' cho ta :

$$CC' = \sqrt{BC'^2 - BC^2}$$
$$= \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

2. Hình-tính của tứ-giác AB'C'D'.

Hai mặt bên đối-diện của mặt lăng-trụ L thì song-song với nhau. Khi mặt phẳng R cắt hai mặt song-song đó, ta được hai giao-tuyến song-song AD' và B'C'. Tương-tự, AB' và D'C' song-song với nhau *(h. 96)*.

Tứ-giác AB'C'D' là một hình bình-hành.

Tính $\overline{BB'}$ và $\overline{DD'}$.

Ta đặt $\overline{BB'} = y$, $\overline{DD'} = z$. Ta lấy chiều dương trên các cạnh bên của mặt lăng-trụ như ở trong hình 96 và ta giả-sử $\overline{CC'} = x > 0$ cho tiện (việc chọn $x > 0$ hoàn-toàn tùy thuộc vào ý-kiến của chúng ta vì ta có quyền chọn chiều dương). Kẻ B'H thẳng góc với CC'.

Trong bất cứ trường-hợp vẽ nào (B' cùng phía với C' hoặc khác phía với C' đối với cạnh BC), ta cũng có:

$$B'H = BC = a$$

$$\overline{HC} = \overline{CC'} - \overline{CH} = \overline{CC'} - \overline{BB'} = x - y$$

Suy ra: $B'C'^2 = B'H^2 + HC'^2 = (x - y)^2 + a^2$

Ngoài ra, ta có:

$$AB'^2 = AB^2 + BB'^2 = 4a^2 + y^2$$

Vì AB'C'D' là hình thoi nên ta có AB' = B'C'. Do đó ta được:

$$(x - y)^2 + a^2 = 4a^2 + y^2$$

$$x^2 - 2xy = 3a^2$$

$$x^2 - 3a^2 = 2xy$$

$$y = \frac{x^2 - 3a^2}{2x} \quad (\text{với } x \neq 0)$$

Bằng một phép tính tương-tự, ta có:

$$D'C'^2 = 4a^2 + (x - z)^2$$

$$AD'^2 = a^2 + z^2$$

Vì $\qquad AD' = D'C' \qquad$ nên

$$4a^2 + (x - z)^2 = a^2 + z^2$$

$$3a^2 + x^2 - 2xz = 0$$

$$2xz = x^2 + 3a^2$$

$$z = \frac{x^2 + 3a^2}{2x} \quad (\text{với } x \neq 0)$$

Trị-số của x để cho hình thoi AB'C'D' ở về một bên của mặt phẳng P.

Ta đã giả-sử $x > 0$.

Thế mà $\overline{DD'} = z = \dfrac{x^2 + 3a^2}{2}$ nên $z > 0$.

D' đã ở cùng phía với C' đối với mặt P rồi, ta chỉ còn cần điều-kiện :

$$\overline{BB'} = \frac{x^2 - 3a^2}{x^2} > 0$$

tức là :

$$x^2 - 3a^2 > 0$$

$$x > a\sqrt{3}$$

Về phương-diện hình-học, điểm C' phải ở *ngoài* đoạn C_0C_1 (nằm trên cạnh bên qua C của L) định bởi $CC_0 = CC_1 = a\sqrt{3}$.

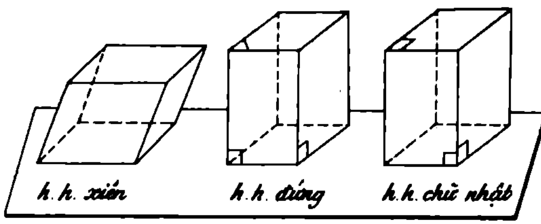
16

Hình hộp

16. 1. ĐỊNH-NGHĨA.

1. **Hình hộp (hay khối bình-hành) là một hình lăng-trụ mà đáy là một hình bình-hành.**

Như vậy hình hộp có 6 mặt cùng là hình bình-hành cả, mặt nào cũng dùng làm đáy được.



Hình 98

2. **Khi đáy thẳng góc với các cạnh bên thì ta được hình hộp đứng. Các mặt bên là những hình chữ-nhật.**

3. **Nếu hình hộp đứng lại có đáy chữ-nhật thì ta được hình hộp chữ-nhật (hay khối chữ-nhật); 6 mặt cùng là hình chữ-nhật cả.**

4. **Hình lập-phương là một hình hộp chữ-nhật mà 6 mặt là 6 hình vuông.**

16. 2. TÍNH-CHẤT.

1. Hình hộp có 12 cạnh chia làm ba nhóm : mỗi nhóm gồm có 4 cạnh song-song và bằng nhau.

2. Hình hộp có 6 mặt chia làm ba nhóm : mỗi nhóm gồm hai mặt song-song và bằng nhau.

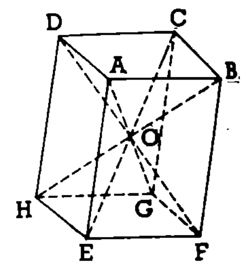
3. Hình hộp có bốn đường chéo cắt nhau tại trung-điểm của mỗi đường. Thật vậy (*h.* 99) :

Trong hình bình-hành ADGF, DF cắt AG tại trung-điểm của mỗi đoạn.

Trong hình bình-hành BCHE, BH cắt CE tại trung-điểm của mỗi đoạn.

Trong hình bình-hành DBFH, DF cắt BH tại trung-điểm của mỗi đoạn.

Ta suy ra rằng bốn đường chéo DF, AG, BH, CE cắt nhau tại trung-điểm O của chúng. O *gọi là tâm của hình hộp*. Đó là tâm đối-xứng của hình hộp.



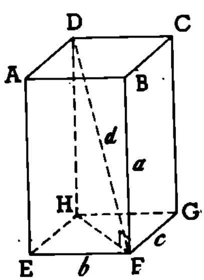
Hình 99

16. 3. ĐỊNH-LÝ.

Trong hình hộp chữ-nhật, bình-phương của đường chéo bằng tổng-số bình-phương của ba chiều (dài, rộng, cao).

Trong hình tam-giác vuông góc HEF, ta có :

$$HF^2 = EH^2 + EF^2$$



Hình 100

Trong hình tam-giác vuông góc DFH, ta có :

$$DF^2 = DH^2 + HF^2$$

$$= DH^2 + EH^2 + EF^2$$

Đặt $DF = d$, $EF = b$, $FG = c$,

$BF = a$, ta được

$$\boxed{\mathbf{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}}$$

Công-thức trên áp-dụng vào hình lập-phương cho ta :

$$d^2 = a^2 + a^2 + a^2 = 3a_2$$

hay

$$\boxed{\mathbf{d = a\sqrt{3}}}$$

THỀ - TÍCH
của Hình hộp và Hình lăng-trụ

16. 4. ĐƠN-VỊ THỂ-TÍCH.

Đơn-vị thề-tích là thề-tích của hình lập-phương mà cạnh bằng đơn-vị chiều dài.

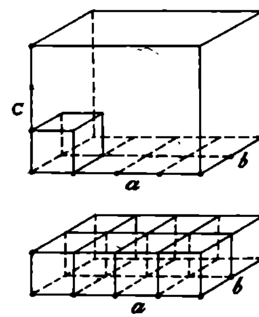
Nếu đơn-vị chiều dài là mét thì đơn-vị thể-tích là thể-tích của hình lập-phương mà mỗi cạnh là 1 mét (gọi tắt là mét khối).

16. 5. THỂ-TÍCH CỦA HÌNH HỘP CHỮ-NHẬT.

Giả-sử ba chiều (dài, rộng, cao) của hình hộp chữ-nhật là a, b, c đơn-vị.

Ta có thể chia chiều rộng làm a phần, chiều dài làm b phần, và ta được $(a \cdot b)$ hình vuông, cạnh là một đơn-vị.

Chia chiều cao làm c phần, rồi kẻ những mặt phẳng song-song với đáy, ta được c tầng, mỗi tầng có $(a \cdot b)$ hình lập-phương, vậy hình hộp chứa $(a \cdot b \cdot c)$ hình lập-phương.



Hình 101

Nói khác đi :

Thể-tích của hình hộp chữ-nhật bằng tích-số ba chiều :

$$\boxed{\mathcal{V} = a \cdot b \cdot c}$$

16. 5. CHÚ-Ý.

Ta có thể viết $V = (ab) \cdot c$ và và nói : Thể-tích của hình hộp chữ-nhật bằng tích-số diện-tích đáy với chiều cao.

Ta công-nhận rằng định-lý trên vẫn đúng khi số đo ba chiều là phân-số hay số vô-tỉ.

16. 6. CÔNG-THỨC ĐỂ TÍNH THỂ-TÍCH CỦA HÌNH LĂNG-TRỤ.

Thể-tích của hình lăng-trụ bằng tích-số diện-tích đáy với chiều cao hoặc diện-tích một thiết-diện thẳng với chiều dài một cạnh bên:

$$\boxed{\mathcal{V} = \mathcal{B} \cdot h = \mathcal{S} \cdot a}$$

$\mathcal{B}$: diện-tích đáy	$\mathcal{S}$: diện-tích thiết-diện thẳng
h : chiều cao	a : cạnh bên

Lời dặn : Khi hai hình chồng khít lên nhau được thì ta nói rằng chúng *bằng nhau*. Khi hai hình có diện-tích bằng nhau (hình-học phẳng) thì ta nói rằng chúng *tương-đương*. Khi hai hình có thể-tích bằng nhau (hình-học không-gian) thì ta nói rằng chúng *tương-đương*.

Hai hình bằng nhau chắc-chắn phải tương-đương.

Hai hình tương-đương chưa chắc đã bằng nhau.

BÀI TẬP

16. 1. *Cho một hình hộp, gọi điểm đồng-qui của các đường chéo là O. Chứng-minh rằng một mặt phẳng đi qua O cắt hình hộp đó theo một hình bình-hành hay một hình lục-giác có các cạnh song-song đôi một.*

16. 2. *Cho một hình hộp ABCD A'B'C'D'. Trên hai cạnh AD và B'C', lấy hai đoạn bằng nhau nhưng ngược chiều : AM = C'N. Chứng-minh rằng MN đi qua tâm của hình hộp.*

16. 3. *Cho một hình lập-phương ABCD A'B'C'D'. Chứng-minh rằng :*

1. Đường chéo AC' đi qua trọng-tâm của hai tam-giác BDA' và CB'D'.

2. Hai trọng-tâm đó chia đoạn AC' làm ba phần bằng nhau.

16. 4. *Cho một hình lập-phương. Tính :*

— góc của hai đường chéo.

— góc của một đường chéo với một cạnh.

— góc của một đường chéo với một mặt của hình lập-phương.

16. 5. *Cho một hình hộp chữ-nhật ABCD A'B'C'D'. Chiều dài các cạnh bên AA', BB', CC,' DD' là h. Cho biết thêm AB = a, AD = b.*

1. Qua DD', hãy vẽ hai mặt phẳng DD'M'M và DD'N'N sao cho hai mặt đó chia hình hộp làm ba phần tương-đương. (Muốn vẽ hai mặt đó, hãy tính AM = x, CN = y).

2. Tính tỉ-số hai thể-tích MBNM'B'N' và MDNM'D'N'.

3. Coi nhị-diện cạnh MM' có hai mặt lần-lượt chứa DD' và NN'. Tìm hệ-thức giữa a và b để cho nhị-diện đó vuông góc.

16. 6. *Cho hai hình chữ-nhật bằng nhau ABCD và ABEF, AB = a, AD = AF = b. Hình ABCD cố-định, hình ABEF quay quanh AB.*

1. Chứng-tỏ rằng CDFE là một hình chữ-nhật. Quỹ-tích tâm của hình đó.

2. CDFE có thể lớn bằng ABCD không ? Trong trường-hợp đó, tính số đo của góc nhị-diện cạnh AB và thể-tích khối ABCDEF.

3. CDFE có thể đồng-dạng với ABCD không ? Tìm hệ-thức giữa a, b để cho điều đó xảy ra được. Cho biết thêm $a^2 = b^2\sqrt{2}$, tính số đo của góc nhị-diện cạnh AB và thể-tích khối ABCDEF theo a.

16. 7. *Cho một hình tứ-diện SABC trong đó SA thẳng góc với mặt ABC, và ABC là một tam-giác đều. Giả-sử $SA = 2a$, $AB = a$.*

1. Tính diện-tích toàn-phần của hình tứ-diện SABC.

2. Trên đoạn SA, ta lấy một điểm M và đặt $AM = x$. Mặt phẳng đi qua M và song-song với mặt ABC cắt SB, SC ở N, P. MNP là hình gì ? Tính chu-vi của tam-giác MNP.

3. Coi hình lăng-trụ đứng mà một mặt đáy là MNP, chiều cao là AM. Tính diện-tích xung-quanh y của lăng-trụ đó. Biến-thiên của y. Đường biểu-diễn.

16. 8. *Cho một hình lập-phương ABCD A'B'C'D' (AA' là một cạnh v.v...). Trên cạnh AB, ta lấy một điểm E. Trên cạnh DD', ta lấy một điểm F để cho AE = DF.*

1. Chứng-tỏ rằng EF song-song với mặt phẳng A'D'BC.

2. Gọi I, J, K, L là trung-điểm của các cạnh AA', D'C', CC', AB. Chứng-minh rằng IJKL là một hình chữ-nhật.

3. Tính các cạnh và đường chéo của hình chữ-nhật đó. Tính góc nhọn của hai đường chéo.

16. 9. *Cho một hình lăng-trụ đứng ABCDEF, đáy là hai tam-giác ABC, DEF, cạnh bên là AD, BE, CF. Giả-sử $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 90^o$ và số đo của nhị-diện cạnh AD là 60^o. Chiếu cạnh BE xuống mặt ADCF thành PQ. Tính tỉ-số thể-tích của hai khối ABPDEQ và BECFPQ.*

TOÁN

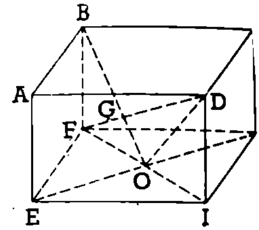
Cho một hình hộp chữ-nhật ABCDEFHI. Trung-điểm của EH là O. một đường chéo của hình hộp là DF.

1. Chứng-tỏ BO phải cắt DF tại một điểm G.

2. Định vị-trí của G trong tam-giác EBH.

3. Cho FB cố-định ; FG = l (hằng-số). Tìm quỹ-tích của D.

BÀI GIẢI



Hình 102

1. Sự tương-giao của BO và DF.

Trong hình chữ-nhật EFHI, hai đường chéo EH, DI phải cắt nhau tại trung-điểm O.

Theo tính-chất của hình hộp chữ-nhật, ta biết DI song-song với BF và bằng BF.

Ta suy ra BD song-song với FI và bằng FI, tức là BD song-song với FO và bằng 2FO ($\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{FI} = 2\overrightarrow{FO}$).

Tứ-giác BDOF là một hình thang lồi, hai đường chéo phải cắt nhau tại một điểm G ; G ở trên *đoạn* BO.

2. Trọng-tâm của tam-giác EBH.

Hai tam-giác GBD và GOF đồng-dạng với nhau, nên

$$\frac{GO}{GB} = \frac{GF}{GD} = \frac{OF}{BD} = \frac{1}{2}$$

Trong tam-giác EBH, BO là một trung-tuyến, trên đó có G.

Tỉ-số $\dfrac{GO}{CB} = \dfrac{1}{2}$ tỏ rằng G là trọng-tâm của tam-giác EBH.

3. Quỹ-tích của D.

Khi FB cố-định thì mặt phẳng P chứa đáy ABCD cũng cố-định.

Vì $\quad FG = l \quad$ nên $\quad FD = 3l.$

Ta đặt $FB = a.$

Theo tính-chất của hình hộp chữ-nhật, ta biết BF thẳng góc với P ; do đó, BF thẳng góc với BD.

Trong tam-giác FBD vuông góc ở B, ta có :

$$BD^2 = FD^2 - FB^2 = (3l)^2 - a^2$$

Suy ra $\qquad BD = \sqrt{9l^2 - a^2} \quad (\text{với } l > \frac{a}{3}).$

Quỹ-tích của D là vòng tròn tâm B, bán-kính $\sqrt{9l^2 - a^2}$, dựng trong P.

17

Hình tháp

17. 1. GÓC NHIỀU MẶT.

Coi một đa-giác phẳng ABCD, và một điểm S ở ngoài mặt phẳng của đa-giác. Những nửa đường thẳng SA, SB... tạo nên một hình gọi là *góc đa-diện* hay *góc nhiều mặt*. Điểm S gọi là *đỉnh*. Góc BSC, ASB,.. gọi là *mặt*. SA, SB... gọi là *cạnh*.

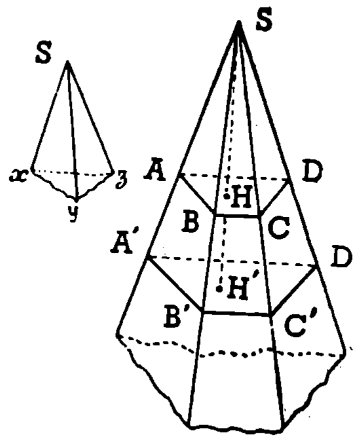
Nếu ABCD là đa-giác *lồi* thì góc đa-diện là một *góc đa-diện lồi*.

Góc nhiều mặt (hay góc đa-diện) là hình gây ra bởi một nửa đường thẳng Sx phát-xuất từ một điểm cố-định S và dựa vào một đa-giác phẳng ABCD mà mặt phẳng không chứa S.

Sx gọi là đường sinh.

S gọi là đỉnh.

Đa-giác ABCD gọi là đường chuẩn.



Hình 103

Đơn-giản nhất trong các góc đa-diện là *góc tam-diện hợp bởi ba nửa đường thẳng phát-xuất từ một điểm, không cùng ở trong một mặt phẳng, đôi một làm thành một góc lồi.*

Góc tam-diện còn gọi ngắn là *tam-diện*. *Tam-diện nào mà ba mặt đều là góc vuông thì gọi là tam-diện ba góc vuông.*

17. 2. ĐỊNH-LÝ.

Khi cắt một góc nhiều mặt bằng hai mặt phẳng song-song thì thiết-diện là hai đa-giác đồng-dạng; tỉ-số đồng-dạng bằng tỉ-số khoảng cách từ đỉnh tới hai mặt cắt.

Gọi ABCD, A'B'C'D' là hai thiết-diện phẳng song-song của một góc nhiều mặt đỉnh S *(h. 103)*.

Gọi H và H' là chân đường thẳng góc hạ từ S xuống hai mặt cắt.

Hai đa-giác ABCD, A'B'C'D' có các góc bằng nhau đôi một, vì có cạnh song-song cùng chiều. Thí-dụ : AB song-song với A'B', BC song-song với B'C' nên $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.

Hơn nữa, hai tam-giác ở trong mỗi mặt — như SAB và SA'B' — đồng-dạng với nhau, nên ta có :

$$\frac{SA'}{SA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{SB'}{SB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{SC'}{SC} = \dots = \frac{SH'}{SH}$$

Suy ra
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \dots = \frac{SH'}{SH}$$

Xem thế, hai đa-giác ABCD, A'B'C'D' đã có những góc bằng nhau kề những cạnh tỉ-lệ, vậy chúng đồng-dạng với nhau.

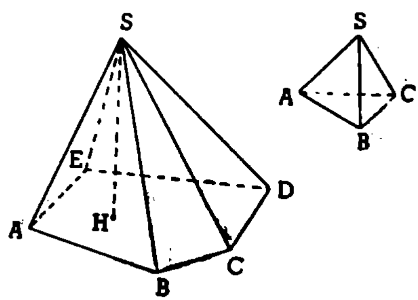
Chú-ý. Tỉ-số diện-tích của hai đa-giác đồng-dạng A'B'C'D' và ABCD bằng bình-phương của tỉ-số đồng-dạng.

17. 3. HÌNH THÁP.

Hình tháp là cố-thể hạn-định bởi một góc nhiều mặt và một mặt phẳng cắt tất cả các cạnh bên.

Trong hình 104, ta có hình tháp SABCDE. S gọi là *đỉnh*, ABCDE gọi là *đáy*, khoảng cách SH từ đỉnh tới đáy gọi là *chiều cao*.

Các *mặt bên* (như SAB, SBC...) là những tam-giác thường*.



Hình 104

Đơn-giản nhất trong số các hình tháp là hình tháp đáy tam-giác mà ta gọi là *hình tứ-diện* hay *khối bốn mặt*.

---

* **Chú-ý rằng** : *Trong một góc đa-diện, mỗi mặt là một góc. Trong một hình tháp, mỗi mặt bên là một tam-giác.*

17. 4. KHỐI BỐN MẶT ĐỀU HAY KHỐI TỨ-DIỆN ĐỀU.

Hình (khối) tứ-diện đều, là một hình tháp đáy tam-giác trong đó tất cả các cạnh dài bằng nhau.

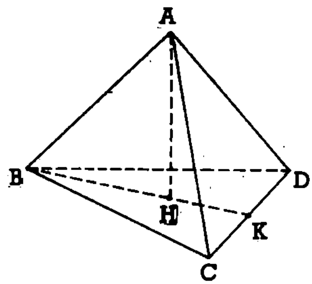
Như thế mỗi mặt là một tam-giác đều (*h. 105*).

Cách tính chiều cao AH theo cạnh a của hình tứ-diện đều ABCD.

A cách đều ba điểm B, C, D, nên khi hạ AH thẳng góc với mặt BCD thì H cách đều B, C, D.

Kẻ chiều cao BK của tam-giác đều BCD :

$$BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$



Hình 105

H là tâm của vòng tròn ngoại-tiếp với tam-giác *đều* BCD và cũng là trọng-tâm nên ta có :

$$BH = \frac{2}{3}\ BK = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Trong tam-giác vuông góc ABH, ta có :

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$$

Do đó $\quad h = AH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ $\quad \boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$

17. 5. HÌNH THÁP ĐỀU.

Một hình tháp được gọi là hình tháp đều, khi :

— đáy là một đa-giác lồi đều.

— đỉnh nằm trên trục của vòng ngoại-tiếp với đáy.

Như thế các cạnh bên dài bằng nhau, các mặt bên những tam-giác cân bằng nhau. Chiều cao phát-xuất từ đỉnh của mỗi mặt bên gọi là **trung-đoạn** ***của hình tháp.***

17. 6. DIỆN-TÍCH XUNG-QUANH CỦA HÌNH THÁP ĐỀU.

Để cho giản-tiện, ta hãy giả-sử rằng hình tháp đều SABCD có bốn mặt bên. Gọi một cạnh đáy là c, trung-đoạn là a (*h. 106 a*).

Diện-tích của một mặt bên là : $\frac{1}{2}\,ac$.

Diện-tích xung-quanh của hình tháp là 4 lần diện-tích một mặt bên, tức là :

$$\mathcal{S} = 4\,\frac{1}{2}\,ac = \frac{1}{2}\,(4c)\,a$$

Nếu hình tháp đều có n mặt bên thì diện-tích xung-quanh sẽ là :

$$\boxed{\mathcal{S} = \frac{1}{2}\,(n\,c)\,a}$$

nc là chu-vi đáy.

Vậy ta có định-lý sau :

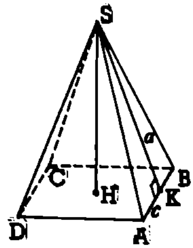
ĐỊNH-LÝ. Diện-tích xung-quanh của hình tháp đều bằng nửa tích-số chu-vi đáy với trung-đoạn.

17. 7. KHAI - TRIỂN BỀ MẶT XUNG-QUANH.

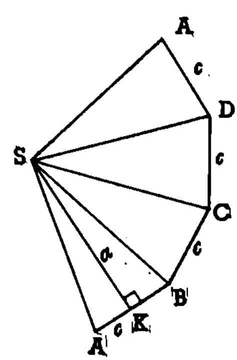
Rạch hình tháp đều theo một cạnh bên rồi giải bề mặt xung-quanh trên một mặt phẳng thì được một hình quạt đa-giác đều (*h. 106b*).

17. 8. THỂ-TÍCH.

Người ta chứng-minh rằng : Thể-tích của mặt hình tháp bằng 1/3 tích-số diện-tích đáy với chiều cao.



Hình 106 a



106 b

Nếu ta gọi diện-tích đáy là $\mathcal{B}$ và chiều cao h thì thề-tích của hình tháp là :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\,\mathcal{B}\,\mathrm{h}}$$

Từ định-lý đó, ta suy ra những điều sau :

1. **Khi đỉnh của một hình tháp xê-dịch trên một mặt phẳng song-song với đáy thề-tích không đổi.**

Thật vậy, $\mathcal{B}$ và h không đồi nên $\mathcal{V}$ không đồi, tuy rằng hình-dạng của hình tháp có thay đồi.

2. Coi hai hình tháp T_1 và T_2. Diện-tích đáy là $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$. Chiều cao là h_1, h_2.

Ta có :

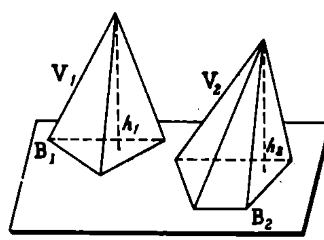
$$\mathcal{V}_1 = \frac{1}{3}\,\mathcal{B}_1 h_1 \quad \mathcal{V}_2 = \frac{1}{3}\,\mathcal{B}_2 h_2$$

Suy ra : $$\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \frac{\mathcal{B}_2\mathrm{h}_1}{\mathcal{B}_2\mathrm{h}_2}$$

a) Nếu $h_1 = h_2$ thì $\dfrac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \dfrac{\mathcal{B}_1}{\mathcal{B}_2}$

b) Nếu $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ thì $\dfrac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \dfrac{h_1}{h_2}$

c) Nếu $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$ và $h_1 = h_2$ thì $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V}_2$



Hình 107

Vậy thì :

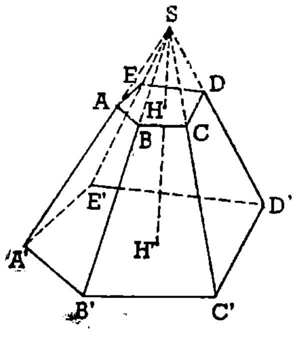
— Tỉ-số thề-tích hai hình tháp mà chiều cao bằng nhau thì bằng tỉ-số diện-tích đáy.

— Tỉ-số thề-tích hai hình tháp mà đáy tương-đương với nhau thì bằng tỉ-số chiều cao.

— Khi hai hình tháp có đáy tương-đương và chiều cao bằng nhau thì chúng tương-đương với nhau.

17. 9. HÌNH THÁP CỤT.

Coi một hình tháp SABCDE. Cắt hình tháp đó bằng một mặt phẳng song-song với đáy thì thiết-diện là một hình A'B'C'D'E'.



Hình 108

Khối ABCDE A'B'C'D'E' gọi là một *hình tháp cụt có đáy song-song.*

Khoảng cách giữa *đáy lớn* ABCDE và *đáy nhỏ* A'B'C'D'E' gọi là *chiều cao.*

Nếu SABCDE là hình tháp đều thì ABCDE A'B'C'D'E' gọi là *hình tháp cụt đều.*

Bấy giờ các mặt bên là những *hình thang cân bằng nhau*, chiều cao của mỗi mặt bên gọi là *trung-đoạn* của hình tháp cụt đều.

Chú-ý. Hai hình tháp SA'B'C'D'E' và SABCDE trong hình 108 gọi là hai hình tháp *đồng-dạng.*

Tỉ-số đồng-dạng là $\dfrac{SA'}{SA}$ hay $\dfrac{A'B'}{AB}$ hay $\dfrac{SH'}{SH}$.

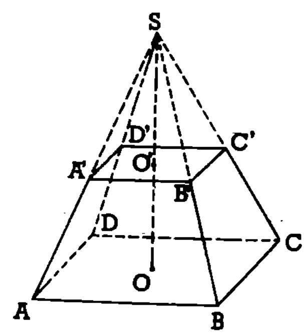
Tỉ-số thể-tích bằng tam-thừa của tỉ-số đồng-dạng.

17. 10. DIỆN-TÍCH XUNG-QUANH CỦA HÌNH THÁP CỤT ĐỀU.

Bề mặt xung-quanh của hình tháp cụt đều gồm nhiều hình thang cân bằng nhau.

Gọi c, c' là hai cạnh đáy, a là trung-đoạn của hình tháp cụt tức chiều cao của hình thang, diện-tích một hình thang là :

$\dfrac{1}{2}(c + c')\,a.$

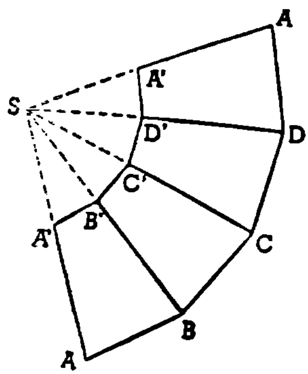


Hình 109

Nếu hình tháp cụt có n mặt bên thì diện-tích xung-quanh của nó là :

$$\mathcal{S} = n\,\frac{1}{2}(c + c')\,a = \frac{nc + nc'}{2}\,a \quad \begin{cases} nc = \text{chu-vi đáy lớn} \\ nc' = \text{chu-vi đáy nhỏ.} \end{cases}$$

Vì thế, ta có định-lý sau này :



Hình 110

ĐỊNH-LÝ. Diện-tích xung-quanh của hình tháp cụt đều, bằng tích-số trung-đoạn với nửa tổng-số chu-vi hai đáy.

Chu-vi của thiết-diện cách đều hai đáy bằng nửa tổng-số chu-vi hai đáy, nên người ta còn đọc khác đi để được hệ-luận sau :

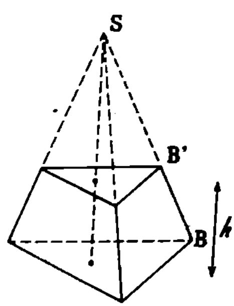
Diện-tích xung-quanh của hình tháp cụt đều, bằng tích-số trung-đoạn với chu-vi của thiết-diện cách đều hai đáy.

Khi khai-triển bề mặt xung-quanh của hình tháp cụt đều bốn mặt, ta có hình 110.

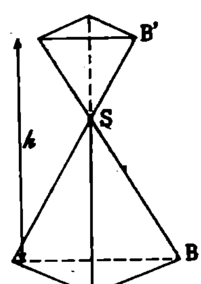
17. 11. THỂ-TÍCH CỦA HÌNH THÁP CỤT.

Ta gọi diện-tích hai đáy của hình tháp (*h. 111a*) là $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ và chiều cao là *h*. Công-thức để tính thể-tích của hình tháp cụt là :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3} h \left(\mathcal{B} + \mathcal{B}' + \sqrt{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \right)}$$



Hình 111a



Hình 111b

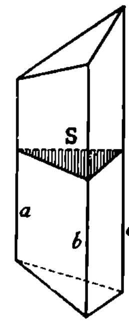
Chú-tích. Khi hai đáy của hình tháp cụt lại ở hai bên của đỉnh S thì ta có *khối tháp cụt loại 2 (h. 111b)*. Lúc đó, ta dùng công-thức sau này để tính thể-tích :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3} h \left(\mathcal{B} + \mathcal{B}' - \sqrt{\mathcal{B}\mathcal{B}'} \right)}$$

17. 12. THỂ-TÍCH CỦA HÌNH LĂNG-TRỤ CỤT ĐÁY TAM-GIÁC.

Ta coi một hình lăng-trụ cụt, hai đáy là hai tam-giác ABC, A'B'C', các cạnh bên là AA' $= a$, BB' $= b$, CC' $= c$. Gọi $\mathcal{S}$ là diện-tích của thiết-diện thẳng, Thể-tích của hình lăng-trụ cụt đáy tam-giác tính bằng công-thức:

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{2}\,\mathcal{S}\,(a + b + c) = \mathcal{S}\,\frac{a + b + c}{3}}$$



Hình 111c

Công-thức đó chỉ dùng cho lăng-trụ cụt đáy tam-giác thôi. Nếu gặp lăng-trụ cụt đáy đa-giác thì ta phải chia nó ra làm nhiều lăng-trụ cụt đáy tam-giác, tính thể-tích của riêng từng khối một, rồi cộng lại.

BÀI TẬP

17. 1. *Cho một tam-giác đều ABC cạnh là a, trực-tâm là H. Trên đường thẳng góc với mặt ABC kẻ từ H, ta lấy một điểm S sao cho HS = a. Trên đoạn HS, ta coi một điểm M định bởi HM = x.*

1. *So-sánh ba đoạn SA, SB, SC.*
2. *Tính diện-tích toàn-phần của hình tháp SABC.*
3. *Tính khoảng cách từ M tới SC và tới BC.*
4. *Tính x để cho điểm M cách đều sáu cạnh của hình tháp SABC.*

17. 2. *Cho một khối tứ-diện đều ABCD cạnh là a. Gọi P là một mặt phẳng lưu-động qua A và song-song với CD. Giả sử P cắt hai cạnh BC, BD ở C' và D'.*

1. *Chứng-tỏ rằng P chứa một đường thẳng cố-định.*
2. *Chứng-tỏ rằng AC'D' là một tam-giác cân và tìm quỹ-tích chân-đường cao phát-xuất từ A của tam-giác cân đó.*
3. *Đặt BC' = x. Tính theo a và x tổng-số bình-phương các cạnh của tam-giác AC'D'. Định x để cho tổng-số bình-phương đó bằng m^2 (m là một đoạn cho trước). Biện-luận theo m.*

17. 3. *Cho một tam-giác đều ABC, chiều cao là AH = h. Trên đoạn AH, ta lấy đoạn* $AO = \dfrac{AH}{3}$. *Từ O, ta kẻ đường thẳng góc với mặt ABC. Trên đó ta lấy đoạn OS = BC. Coi hình tháp SABC.*

1. *Chứng-tỏ rằng AS trực-giao với CB.*
2. *Tính SH, SA, SB, SC theo h.*

3. Từ một điểm J lấy trên đoạn OH, ta vẽ mặt phẳng P song-song với SO và BC. Chứng-tỏ rằng P cắt hình tháp SABC theo một hình thang cân MNQR. Đặt AJ = x, tính diện-tích y của hình thang cân đó theo h và x.

4. Vẽ đường biểu-diễn sự biến-thiên của y khi J vạch nên đoạn OH.

17. 4. *Trong một mặt phẳng Q, coi góc $\widehat{xAy} = 60^o$. Vẽ đoạn AB = a thẳng góc với Q. Vẽ BZ song-song cùng chiều với Ay. Trên Ax, lấy một điểm M. Trên BZ, lấy một điểm P. Đặt AM = x và giả-sử BP = 2x.*

1. Tính MP và thể-tích của khối tháp ABMP theo a và x.

2. Tính x khi góc của MP với mặt Q là 60^o.

3. Tìm quỹ-tích trung-điểm của đoạn MP khi x thay đổi.

4. Chứng-minh rằng MP song-song với một mặt phẳng cố-định khi x thay đổi

TOÁN

Người ta coi một tứ-diện ABCD, cạnh AD thẳng góc với mặt phẳng ABC và bằng 4a; các cạnh của tam-giác ABC là; AB = 3a. AC = 4a; BC = 5a.

1. Chứng-minh rằng tam-diện đỉnh A có ba mặt là ba góc vuông.

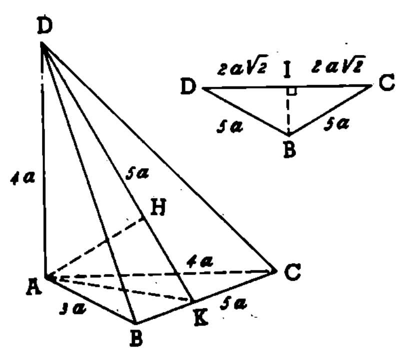
2. Tính theo a, diện-tích toàn-phần và thể-tích của tứ-diện ấy.

3. Tính chiều dài h của đường cao kẻ từ đỉnh A, và nghiệm lại rằng ta có:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$$

BÀI GIẢI

1. Hình-tính của tam-diện đỉnh A.



Hình 112

Vì DA thẳng góc với mặt ABC theo giả-thiết, nên DA thẳng góc với AB, AC, và trực-giao với BC.

Do đó, hai góc $\widehat{DAB}$ và $\widehat{DAC}$ là những góc vuông.

Trong tam-giác ABC, áp-dụng định-lý đảo của định-lý Pythagore thì ta có:

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

$(25a^2 = 9a^2 + 16a^2)$

Điều đó tỏ rằng $\widehat{BAC} = 90^o$.

Xem thế, tam-diện ABCD là một tam-diện ba góc vuông.

2. Thể-tích của hình tháp ABCD. Diện-tích đáy là

$$\mathcal{B} = \frac{1}{2} AB \times AC = \frac{1}{2} \times 3a \times 4a = 6a^2$$

Chiều cao là $AD = 4a.$

Thể-tích $\mathcal{V}$ của hình tháp ABCD là:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times 6a^2 \times 4a = 8a^3.$$

Diện-tích toàn-phần của hình tháp ABCD.

Ba mặt DAB, DAC, ABC của hình tháp là những tam-giác vuông góc mà diện-tích lần-lượt là $6a^2$, $8a^2$, $6a^2$.

Dùng tam-giác DAB, ta tính ra được $BD = 5a$

Dùng tam-giác DAC, ta tính ra được $DC = 4a\sqrt{2}$

Tam-giác DBC là một tam-giác cân, đỉnh là B. Kẻ đường cao BI, ta có:

$$BI^2 = BC^2 - IC^2 = 25a^2 - 8a^2 = 17a^2$$
$$BI = a\sqrt{17}$$

Diện-tích tam-giác DBC là:

$$\frac{1}{2} BI \times DC = \frac{1}{2} 4a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{17} = 2a^2\sqrt{34}$$

Diện-tích toàn-phần $\mathcal{S}$ của hình tháp ABCD là:

$$\mathcal{S} = 6a^2 + 8a^2 + 6a^2 + 2a^2\sqrt{34}$$
$$= 20a^2 + 2a^2\sqrt{34}$$
$$= 2a^2(10 + \sqrt{34})$$

3. Trị-số chiều cao AH = h của hình tháp.

Thể-tích $\mathcal{V}$ của hình tháp ABCD có thể tính như sau:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \text{dt (DBC)} \times AH$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} 2a^2\sqrt{34} \times h$$

Suy ra $h = \dfrac{3\mathcal{V}}{2a^2\sqrt{34}}$. Thế mà $\mathcal{V} = 8a^3$, nên :

$$h = \frac{24a^3}{2a^2\sqrt{34}} = \frac{12a}{\sqrt{34}} = \frac{12a\sqrt{34}}{34} = \frac{6a\sqrt{34}}{17}$$

Cách nghiệm lại hệ-thức.

Ta có $h = \dfrac{12a}{\sqrt{34}}$, $\dfrac{1}{h^2} = \dfrac{34}{144a^2} = \dfrac{17}{72a^2}$

và
$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{16a^2} + \frac{1}{16a^2} = \frac{16+9+9}{144a^2}$$
$$= \frac{34}{144a^2} = \frac{17}{72a^2}$$

Do đó
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2}$$

Chú-thích. Xem lại bài toán ở cuối bài số 14, ta biết rằng H là trực-tâm của tam-giác DBC.

TOÁN

Cho một hình tháp SABCD ; đáy ABCD là một tứ-giác lồi nội-tiếp trong một vòng tròn tâm O, bán-kính R, có AB = AD, CB = CD và $\widehat{BAD} = 60^0$. Hai mặt bên SAB và SAD là hai tam-giác cân, vuông góc ở B và D.

1. Chứng-minh rằng AB thẳng góc với mặt SBC, AD thẳng góc với mặt SCD rồi suy rằng SC thẳng góc với mặt đáy.

2. Tính theo R diện-tích toàn-phần và thể-tích của hình tháp.

3. Một mặt phẳng song với đáy cắt các cạnh SA, SB, SC, SD theo thứ-tự ở E, F, G, H. Tính SG theo R để có thể-tích hình tháp cụt bằng 19/8 thể-tích hình tháp nhỏ.

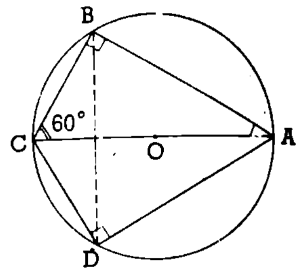
BÀI GIẢI

Khảo-sát tứ-giác ABCD.

Đó là một tứ-giác nội-tiếp trong vòng tròn (O, R), nhận AC làm trục đối-xứng. Vì $\widehat{BAD} = 60^o$, nên $\widehat{BAC} = 30^o$ và $\widehat{BCA} = 60^o$. Ta suy ra rằng $AB = AD = R\sqrt{3}$ và

$$CB = CD = R$$

$$\widehat{CBA} = \widehat{CDA} = 90^o$$



Hình 113

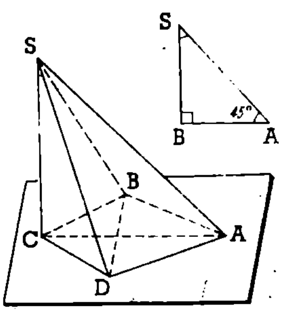
1. Vị-trí của AB đối với mặt phẳng SBC.

Theo trên, ta biết AB thẳng góc với CB. Theo giả-thiết, ta biết AB thẳng góc với SB.

AB thẳng góc với BC và BS nên AB thẳng góc với mặt phẳng SBC định bởi hai đường đồng-qui BC, BS.

Ta suy ra rằng AB trực-giao với SC

Chứng-minh tương-tự, ta biết rằng : AD thẳng góc với mặt phẳng SCD và AD trực-giao với SC.



Hình 114

Vị-trí của SC đối với mặt đáy.

SC trực-giao với AB và AD nên SC thẳng góc với mặt đáy ABCD của hình tháp.

Ta suy ra rằng SC thẳng góc với CB và CD.

2. Diện-tích toàn-phần của hình tháp SABCD.

Vì hình tháp nói trên có một mặt phẳng đối-xứng rõ-rệt là SCA, nên ta tính diện-tích bán-phần của nó trước :

$$\text{dt (SBA)} = \frac{1}{2}\,BA\,.\,BS = \frac{1}{2}\,BA\,.\,BA = \frac{1}{2}\,BA^2 = \frac{3R^2}{2}$$

$$dt\,(BCA) = \frac{1}{2}\,AB\,.\,BC = \frac{1}{2}\,R\sqrt{3}.\,R = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$$

Trong tam-giác vuông góc SCB, ta có :

$$SC^2 = SB^2 - BC^2 = BA^2 - BC^2 = 3R^2 - R^2 = 2R^2$$

$$SC = R\sqrt{2}$$

$$dt\,(SCB) = \frac{1}{2}\,SC\,.\,CB = \frac{1}{2}\,R\sqrt{2}.\,R = \frac{R^2\sqrt{2}}{2}$$

Diện-tích bán-phần của hình tháp SABCD là ;

$$s = \frac{3R^2}{2} + \frac{R^2\sqrt{3}}{2} + \frac{R^2\sqrt{2}}{2} = \frac{R^2}{2}\,(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2}).$$

Diện-tích toàn-phần của hình tháp là :

$$\mathcal{S} = 2s = R^2\,(3 + \sqrt{3} + \sqrt{2})$$

Thể-tích của hình tháp SABCD.

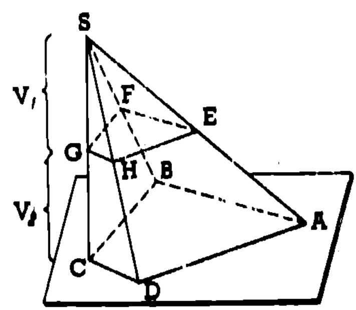
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\,dt\,(ABCD)\,.\,SC$$

$$= \frac{1}{3}\,R^2\sqrt{3}\,.\,R\sqrt{2} = \frac{R^3\sqrt{6}}{3}$$

Trị-số của SG.

Ta gọi thể-tích của hình tháp nhỏ là $\mathcal{V}_1$ thể-tích của hình tháp cụt là $\mathcal{V}_2$. ta có hệ-thống sau này :

$$\begin{cases} \mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \mathcal{V} = \dfrac{R^3\sqrt{6}}{3} \\ \dfrac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1} = \dfrac{19}{8} \end{cases}$$



Hình 115

Ta suy ra $\dfrac{\mathcal{V}_1}{8} = \dfrac{\mathcal{V}_2}{19} = \dfrac{\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2}{8 + 19} = \dfrac{\mathcal{V}}{27}$

Do đó $\quad \dfrac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}} = \dfrac{8}{27}$

Hai hình tháp SEFGH, SABCD đồng-dạng, tỉ-số đồng-dạng là $\frac{SG}{SC}$.

Tỉ-số thể-tích bằng tam-thừa của tỉ-số đồng-dạng nên ta có :

$$\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}} = \left(\frac{SG}{SC}\right)^3 = \frac{8}{27} \qquad \left(\text{nhận-xét } \frac{8}{27} = \frac{2^3}{3^3}\right)$$

Suy ra $$\frac{SG}{SC} = \frac{2}{3}$$

và $$SG = \frac{2SC}{3} = \frac{2}{3}\ R\sqrt{2} = \frac{2R\sqrt{2}}{3}$$

18

Hình trụ và hình nón

1. ĐỊNH-NGHĨA.

18. 1. MẶT TRỤ. HÌNH TRỤ.

1. Mặt trụ là mặt gây ra bởi một đường thẳng Δ chuyển-động theo hai điều-kiện :

— Δ bao giờ cũng song-song với một phương d cố-định.

— Δ dựa vào một đường cong phẳng (C).

Δ không song-song với mặt phẳng chứa (C).

(C) gọi là *đường chuẩn* hay *đáy* của mặt trụ.

Δ gọi là *đường sinh*.

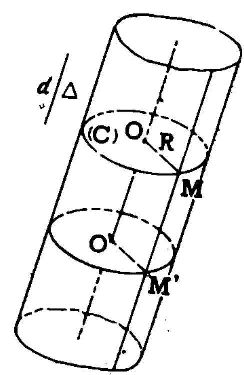
Qua mỗi điểm M của mặt trụ, chỉ có một đường sinh mà thôi.

Mặt trụ có thể trượt trên chính nó theo phương *d*.

Sau này ta chỉ khảo-sát những mặt trụ mà đáy là hình tròn, đó là những *mặt trụ có đường chuẩn tròn*.

2. Hình trụ đáy tròn là một cố-thể giới-hạn bởi một mặt trụ có đường chuẩn tròn và hai thiết-diện phẳng song-song với mặt đường chuẩn.

Sau này (18.3.) ta sẽ biết rằng hai thiết-diện đó lớn bằng vòng tròn chuẩn.



Hình 116

Hai hình tròn gọi là hai *đáy*. Bán-kính R của chúng cũng gọi là *bán-kính* của hình trụ. Khoảng cách *h* giữa hai mặt đáy gọi là *chiều cao* của hình trụ.

18. 2. MẶT NÓN, HÌNH NÓN.

1. Mặt nón là mặt gây bởi một đường thẳng Δ chuyển-động theo hai điều-kiện :

— Δ bao giờ cũng qua một điểm cố-định S.

— Δ dựa vào một đường cong phẳng (C), mặt của đường cong này không đựng S.

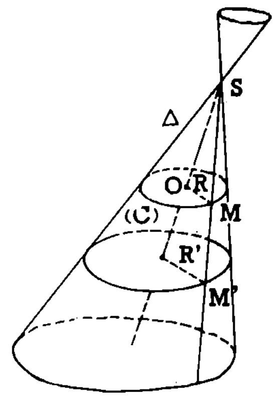
S là *đỉnh* của mặt nón.

Δ là *đường sinh*. Mỗi vị-trí của Δ là một đường sinh. Qua mỗi điểm M của mặt nón chỉ có một đường sinh mà thôi.

(C) là *đường chuẩn* hay *đáy* của mặt nón.

Mặt nón gồm *hai lớp* (hay *hai tầng*) có chung đỉnh S.

Sau này ta chỉ khảo-sát những mặt nón mà đáy là hình tròn. Đó là những *mặt nón có đường chuẩn tròn.*



Hình 117

2. Hình nón đáy tròn là một cố-thể giới-hạn bởi một lớp của một mặt nón có đường chuẩn tròn và mặt phẳng đường chuẩn.

Bán-kính R của đáy là *bán-kính* của hình nón. Khoảng cách từ đỉnh tới đáy là *chiều cao* của hình nón.

3. Hình nón cụt là một phần của hình nón giới-hạn bởi đáy và một thiết-diện phẳng song-song với đáy.

18. 3. ĐỊNH-LÝ.

Khi cắt mặt trụ có đường chuẩn tròn hằng một mặt phẳng song-song với mặt đường chuẩn thì thiết-diện là một hình tròn, lớn bằng đường chuẩn.

Gọi P là mặt chứa đường chuẩn tròn, tâm O, bán-kính R. Gọi P' là mặt cắt, P' song-song với P *(h. 116)*.

Đường song-song với đường sinh, kẻ từ O, cắt P' tại điểm O' cố-định.

Gọi A là một điểm trên vòng (C). Đường sinh qua A cắt P' tại A'.

OO' song-song với AA', chúng định được một mặt phẳng, và mặt phẳng đó cắt hai mặt song-song P, P' theo hai đường song-song OA, O'A'.

Như thế OAA'O' là một hình bình-hành. Do đó O'A' = OA = R. Quỹ-tích của A' là một vòng tròn tâm O', bán-kính R đựng trong mặt P'.

Tóm lại, P' cắt mặt trụ theo một vòng tròn lớn bằng đường chuẩn.

18. 4. ĐỊNH-LÝ.

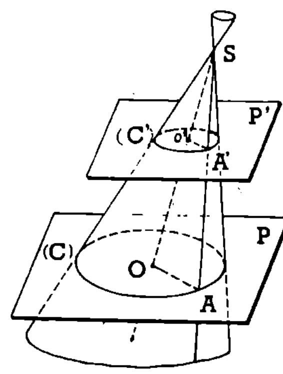
Khi cắt một mặt nón có đường chuẩn tròn bằng một mặt phẳng song-song với mặt đường chuẩn thì thiết-diện là một vòng tròn.

Coi một mặt nón đỉnh S, đường chuẩn tròn (C) đựng trong mặt phẳng P. Ta cắt nó bằng mặt phẳng P' song-song với P. Gọi A là một điểm lấy trên đường chuẩn (C) mà tâm là O. P' cắt SO, SA tại O', A'.

Mặt phẳng SOA cắt P, P' theo hai giao-tuyến song-song OA, OA' ; hai tam-giác đồng-dạng SOA, SO'A' cho ta :

$$\frac{O'A'}{OA} = \frac{SO'}{SO}$$

Suy ra $O'A' = OA \times \dfrac{SO'}{SO}$



Hình 118

Khi đường sinh SA thay đổi thì OA không đổi, SO' và SO cũng không đổi. Do đó, O'A' là một hằng-số. Vậy A' vạch nên một vòng tròn (C'), tâm O', bán-kính O'A'. Đặt OA = R, O'A' = R'

ta có $\dfrac{R'}{R} = \dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{h'}{h}$, h' và h là khoảng-cách từ S đến P' và P.

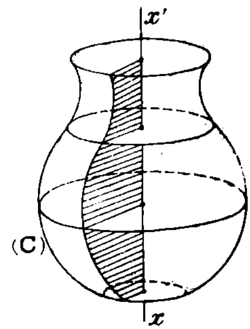
Nếu ta lấy hình giới-hạn bởi mặt nón và hai mặt phẳng P và P' thì ta được một *hình nón cụt đáy tròn song-song*. (C) và (C') gọi là hai *đáy*, khoảng cách giữa hai đáy gọi là *chiều cao.*

18. 5. MẶT TRÒN XOAY.

Xét một đường cong (C) và một đường thẳng $x'x$ cùng đựng trong mặt phẳng P. Khi mặt phẳng P quay quanh $x'x$ thì (C) gây nên một mặt, gọi là *mặt tròn xoay* mà *trục* là $x'x$.

Mỗi vị-trí của (C) gọi là một *kinh-tuyến* của mặt tròn xoay.

Mỗi điểm M của (C) vạch nên một vòng tròn mà trục là $x'x$. Những vòng tròn gây bởi mỗi điểm của (C) gọi là những *vĩ-tuyến* của mặt tròn xoay (*h.119*).



Hình 119

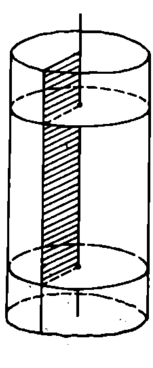
Mặt phẳng nào chứa trục được gọi là *kinh-diện* của mặt tròn xoay.

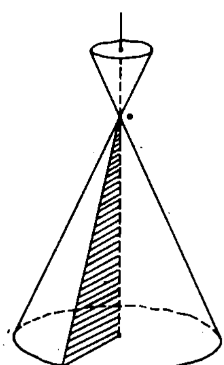
1. **Mặt trụ tròn xoay** là mặt gây bởi một đường thẳng song-song với trục quay khi nó quay quanh trục đó (*h. 120a*).

2. **Hình trụ tròn xoay** là một hình giới-hạn bởi một mặt trụ tròn xoay và hai thiết-diện thẳng góc với trục quay.

Có thể coi hình trụ tròn xoay là cố-thể gây nên bởi một hình chữ-nhật OAA'O' khi nó quay quanh một cạnh (OO') (*h. 121a*).

3. **Mặt nón tròn xoay** là một mặt tròn xoay gây ra bởi một đường thẳng quay quanh một trục có cắt đường thẳng ấy (*h. 120b*)


Hình 120a


Hình 120b

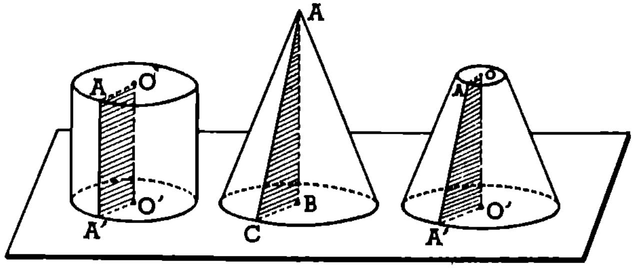
4. **Hình nón tròn xoay** là một cố-thể gây nên bởi một tam-giác vuông góc quay quanh một cạnh của góc vuông (như AB). Góc CAB gọi là *nửa góc đỉnh*. Cạnh AB là *đường cao* chường chỉ bằng *h*), cạnh AC là *trung-đoạn* (thường chỉ bằng *a*) hay *đường sinh* (*h. 121b*).

5. **Hình nón cụt tròn xoay** là một phần của mặt nón tròn xoay giới-hạn bởi hai mặt phẳng thẳng góc với trục.

Có thể coi hình nón cụt tròn xoay là một cố-thể gây bởi hình thang vuông góc OO'A'A quay quanh đường cao OO' (*h. 121c*).

Cạnh OO' gọi là *đường cao* của hình nón cụt (thường chỉ bằng h).

Cạnh AA' gọi là *đường sinh* hay *trung-đoạn* (thường chỉ bằng a).



(chữ-nhật (tam-giác vuông-góc) (hình thang vuông góc)
Hình 121a Hình 121b Hình 121c

2. DIỆN-TÍCH XUNG-QUANH.

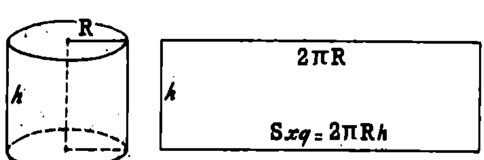
18. 6. DIỆN-TÍCH XUNG-QUANH CỦA HÌNH TRỤ TRÒN XOAY.

Ta coi một hình trụ tròn xoay, bán-kính đáy là R, chiều cao là h. Ta hãy tưởng-tượng rằng hình trụ đó được rạch ra theo một đường sinh. Ta giải bề mặt xung-quanh lên một mặt phẳng. Giải bề mặt xung-quanh lên một mặt phẳng gọi là *khai-triển bề mặt xung-quanh*. Ta được một hình chữ-nhật mà hai chiều là $2\pi R$ và h. Diện-tích xung-quanh của hình trụ tròn xoay là :

$$\boxed{\mathcal{S}_{xq} = 2\pi R h}$$

ĐỊNH-LÝ.

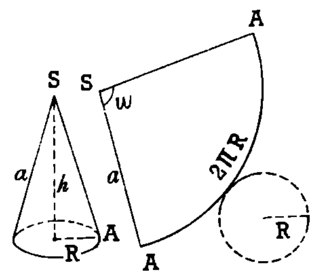
Diện-tích xung-quanh của hình trụ tròn xoay bằng tích-số chu-vi đáy với chiều cao.



Hình 122

18. 7. DIỆN-TÍCH XUNG-QUANH CỦA HÌNH NÓN TRÒN XOAY.

Ta coi một hình nón tròn xoay, bán-kính đáy là R, trung-đoạn là a. Ta hãy tưởng-tượng rằng hình nón đó được rạch ra theo một đường sinh. Ta giải bề mặt xung-quanh lên một mặt phẳng. Ta được một hình quạt tròn mà bán-kính là a, cung là 2π R.



Hình 123

Chu-vi của vòng tròn chứa hình quạt là $2\pi a$. Diện-tích của hình tròn đó là πa^2. Ta suy ra bằng một qui-tắc tam-xuất rằng diện-tích của hình quạt (tức diện-tích xung-quanh của hình nón) là :

$$\mathcal{S}_{xq} = \pi a^2 \times \frac{2\pi R}{2\pi a} = \pi R a$$

$$\boxed{\mathcal{S}_{xq} = \pi R a} = \frac{1}{2}\left(2\pi R\right)a$$

Vậy ta có định-lý này :

ĐỊNH-LÝ. Diện-tích xung-quanh của hình nón tròn xoay bằng nửa tích-số chu-vi đáy với trung-đoạn.

18. 8. CHÚ-Ý.

Nếu dùng độ làm đơn-vị thì góc ở tâm của hình quạt tính theo công-thức :

$$\boxed{\omega = 360^\circ \times \frac{R}{a}}$$

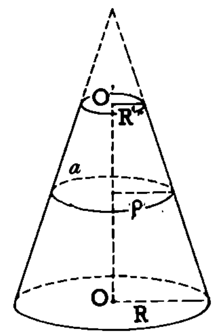
Công-thức này cho phép ta tính một trong ba số ω^0 R, a khi biết hai số kia. Thật vậy :

$$a = \frac{360^0}{\omega^0} \times R \qquad R = a \times \frac{\omega^0}{360^0}$$

18. DIỆN-TÍCH XUNG-QUANH CỦA HÌNH NÓN CỤT TRÒN XOAY.

Coi một hình nón cụt tròn xoay, trung-đoạn là a, hai bán-kính là R và R'. Để tính diện-tích xung-quanh của nó, người ta dùng công-thức :

$$\boxed{\mathcal{S}_{xq} = \pi\,(R + R')\,a}$$



Hình 124

Ta viết được :

$$\mathcal{S}_{xq} = (\pi R + \pi R')\,a = \frac{2\pi R + 2\pi R'}{2}\,a$$

Do đó ra được định-lý này :

ĐỊNH-LÝ. Diện-tích xung-quanh của hình nón cụt tròn xoay bằng tích-số trung-đoạn với nửa tổng-số chu-vi hai đáy.

Chú-ý : Gọi ρ là bán-kính của thiết-diện cách đều hai đáy, ta có :

$$\rho = \frac{R + R'}{2} \quad \text{hay} \quad R + R' = 2\rho$$

Vì thế :

$$\boxed{\mathcal{S}_{xq} = 2\,\pi\,\rho\,.\,a}$$

và ta có hệ-luận này :

Diện-tích xung-quanh của hình nón cụt tròn xoay bằng tích-số trung-đoạn với chu-vi của thiết-diện cách đều hai đáy.

3. THỂ-TÍCH.

18. 10. ĐỊNH-LÝ.

1. **Thể-tích của hình trụ bằng tích-số diện-tích đáy với chiều cao.**

Gọi bán-kính đáy là R, chiều cao là h, ta có :

$$\boxed{\mathcal{V} = \pi R^2 h}$$

2. **Thể-tích của hình nón bằng 1/3 tích-số diện-tích đáy với chiều cao.**

Gọi bán-kính đáy là R, chiều cao là h, ta có:

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi R^2 h}$$

3. Nếu phải tính thể-tích của hình nón cụt, bán-kính đáy là R, R'. chiều cao là h, ta dùng công-thức:

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi h (R^2 + RR' + R'^2)}$$

BÀI TẬP

18. 1. *Hãy định một hình trụ tròn xoay khi người ta cho biết ba đường sinh (nên dùng một thiết-diện thẳng).*

18. 2. *Cho hai đường thẳng song-song D_1, D_2. Tìm quỹ-tích những đường thẳng D_3, biết rằng nhị-diện hợp bởi hai mặt phẳng (D_1, D_3) và (D_2, D_3) là nhị-diện vuông góc.*

18. 3. *Cho một đường thẳng D. Tìm quỹ-tích những điểm M, biết rằng khoảng cách từ M tới D là R.*

18. 4. *Cho hai đường thẳng song-song D_1, D_2. Tìm quỹ-tính những điểm M, biết rằng tỉ-số khoảng cách từ M tới D_1 và D_2 là k (= hằng-số khác 1).*

18. 5. *Cho một mặt trụ (T) trên đó lấy một đường sinh D. Chứng-minh rằng một mặt phẳng P phát-xuất từ D cắt mặt trụ theo một đường sinh khác.*

18. 6. *Cho một mặt trụ tròn xoay. Từ một điểm M, kẻ hai cát-tuyến MAB và MCD, mỗi cát-tuyến tạo với trục của mặt trụ một góc α. Chứng-minh rằng $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = \overline{MC} \cdot \overline{MD}$.*

17. 8. *Tính chiều cao h của một hình trụ tròn xoay biết diện-tích xung-quanh s và diện-tích toàn-phần S.*

18. 8. *Tính diện-tính toàn-phần S của một hình trụ tròn xoay biết thể-tích V và bán-kính R.*

18. 9. *Có một hình chữ-nhật, cạnh là x, y. Cho nó quay một cạnh thì thể-tích gây nên là V_1; cho nó quay cạnh kề với cạnh nói trên thì thể-tích gây nên là V_2. Tính x và y.*

18. 10. *Biết rằng diện-tích xung-quanh của hai hình trụ tròn xoay tương-đương với nhau, tính tỉ-số thể-tích của chúng.*

18. 11. *Biết rằng thể-tích của hai hình trụ tròn xoay tương-đương với nhau, tính tỉ-số diện-tích xung-quanh của chúng.*

18. 12. *Cho một hình chữ-nhật quay quanh một đường thẳng song-song với một cạnh và nằm trong mặt phẳng của hình chữ-nhật và không xuyên qua chữ-nhật. Chứng-minh rằng thể-tích do hình chữ-nhật gây nên bằng tích-số của diện-tích hình chữ-nhật với chu-vi của vòng tròn gây bởi tâm hình chữ-nhật.*

18. 13. *Cho một đường thẳng D và một điểm O ở ngoài D. O và D đều cố-định.*

1. Gọi P là một mặt phẳng lưu-động nhưng song-song với D. Tìm quỹ-tích hình chiếu của O xuống P.

2. Gọi $\triangle$ là một đường thẳng lưu-động nhưng cắt D và thẳng góc với D. Tìm quỹ-tích (S) của hình chiếu của O xuống $\triangle$. Giao-tuyến của quỹ-tích đã tìm thấy ở câu trên và ở câu này là đường nào ?

18. 14. *Cho hai đường thẳng Ox, Oy. Gọi P, Q là hai mặt phẳng lần-lượt chứa Ox và Oy. Giả-sử P thẳng góc với Q. Tìm quỹ-tích giao-tuyến của P và Q. (Nên dùng một mặt phẳng thẳng góc với Ox hay Oy).*

18. 15. *Khi khai-triển bề mặt xung-quanh của một hình nón tròn xoay, người ta được một nửa vòng tròn, bán-kính a. Tính bán-kính đáy và chiều cao của hình nón đó.*

18. 16. *Khi khai-triển bề mặt xung quanh của một hình nón tròn xoay, người ta được một hình quạt tròn, bán-kính 8 cm, góc đỉnh là 240°.*
Tính chiều cao, diện-tích toàn-phần và thể-tích của hình nón đó.

18. 17. *Tính thể-tích V của một hình nón tròn xoay biết diện-tích toàn-phần S và trung-đoạn a.*

18. 18. *Tính thể-tích V của một hình nón tròn xoay biết diện-tích toàn-phần S và chiều cao h.*

18. 19. *Gọi V, V', V'' lần-lượt là thể-tích gây bởi tam-giác vuông góc khi nó quay quanh cạnh huyền và hai cạnh cúc góc vuông. Chứng-minh rằng :*

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{V'^2} + \frac{1}{V''^2}$$

18. 20. *Cho một một-giác đều, trọng-tâm là O. Gọi D là một đường thẳng song-song với một cạnh của tam-giác, nằm trong mặt của tam-giác và không xuyên qua tam-giác ; chứng-minh rằng thể-tích gây bởi tam-giác ABC khi quay quanh D bằng tích-số diện-tích tam-giác với chu-vi của vòng tròn gây bởi O.*

18. 21. *Cho một cái bình hình nón cụt tròn xoay, bán-kính hai đáy lần-lượt là 2m 50 và 1m, chiều cao 3m. Người ta muốn chia bình làm hai phần tương-đương bằng một mặt phẳng thẳng góc với trục của hình nón cụt. Hỏi ;*

1. *Vách ngăn đó cách mỗi đáy bao nhiêu ?*
2. *Bán-kính của vách ngăn hình tròn đó.*

18. 22. *Một cái chụp đèn hình nón cụt, bán-kính đáy nhỏ và đáy lớn là r_1 và r_2, đường sinh là a, chiều cao là h. Cắt mặt nón theo một đường sinh và giải ra trên một mặt phẳng. Hai đường tròn đáy trở thành hai cung mà góc ở tâm là 90^o và bán-kính những đường tròn chứa hai cung ấy lần-lượt là R_1 và R_2. Tính theo R_1 và R_2 ;*

1. *r_1, r_2 và a.*
2. *diện-tích S của chụp đèn.*
3. *h.*
4. *thể-tích của hình nón cụt mà bề mặt xung-quanh là chụp đèn.*

18. 23. *Cho một vòng tròn tâm O, đường kính $AB = 2R$, kẻ hai tiếp-tuyến Ax. By ở A và B. Gọi M là một điểm lưu-động trên vòng tròn. Tiếp-tuyến tại M cắt Ax, By lần-lượt tại P, Q. Đặt $AP = x$, $BQ = y$.*

1. *Chứng-minh rằng $AP.\,BQ = R^2$.*

2. *Trung-trực của AB cắt PQ tại L. Đặt $OL = mR$ (m là một số dương cho sẵn).*

Viết một phương-trình bậc hai mà nghiệm-số là x và y.

Giải phương-trình đó trong trường-hợp $m = 2$.

3. *Tính PQ theo m và R.*

4. *Cho hình thang APQB quay quanh AB. Tính diện-tích toàn-phần của khối gây nên, theo m và R.*

18. 24. *Cho một hình nón tròn xoay (C), đỉnh S. Đáy là một vòng tâm O, bán-kính 3 cm. Chiều cao SO bằng 4cm. Trên đoạn SO, lấy một điểm O′, rồi từ O′ kẻ mặt phẳng song-song với mặt đáy. Thiết-diện đó chia hình nón (C) thành một hình nón (C_1) và một hình nón cụt (C_2). Đặt $SO' = x$.*

1. Chứng-minh rằng thiết-diện là một hình tròn. Tính bán-kính của hình tròn đó theo x.

2. Tính chiều dài đường sinh của (C) và (C_1). Tính diện-tích S. S_1, S_2 và thể-tích V, V_1, V_2 của các cố-thể (C), (C_1), (C_2).

3. Khảo-sát sự biến-thiên của S_1 và S_2 theo x. Vẽ hai đường biểu-diễn vào một đồ-thị chung.

4. Hai đường biểu-diễn trên cắt nhau tại một điểm I. Hoành-độ x_0 của I là bao? Dùng hình-học để vẽ đoạn x_0. Vẽ hình nón (C) và thiết-diện ứng với trị-số x_0.

Khi $x = x_0$ tính tỉ-số $\frac{S}{S_1}$ rồi suy ra tỉ-số $\frac{V}{V_1}$

18. 25. *Cho phương-trình : $x^2 - (m - 1)x + m + 2 = 0$.*

1. Tính m để phương-trình có hai nghiệm-số.

2. Trên một trục x'Ox, lấy hai điềm M' và M'', $\overline{OM'} = x'$, $\overline{OM''} = x''$ (x' và x'' là hai nghiệm-số của phương-trình).

Vẽ vòng (C') tâm M', bán-kính M'O, ; vẽ vòng (C'') tâm M'', bán-kính M''O.

Tìm điều-kiện cho m để hai vòng đó tiếp-xúc ngoài.

Hai vòng đó có bằng nhau mà không trùng nhau được không?

3. Giả-sử (C') và (C'') tiếp-xúc ngoài. Kẻ tiếp-tuyến chung ngoài T'T''. Theo m, tính T'T'' và diện-tích gây bởi đoạn M'M'' khi nó quay quanh T'T''.

TOÁN

Cho một hình nón cụt tròn xoay, đáy là hai vòng tròn (C), (C'), tâm O, O', bán-kính R, R' (R > R').

Nó ngoại-tiếp với một hình cầu đường kính OO'. Gọi C" là vòng tiếp-xúc của bề mặt xung-quanh của hình nón và hình cầu. Gọi R" là bán-kính của vòng C". Đặt OO' = h.

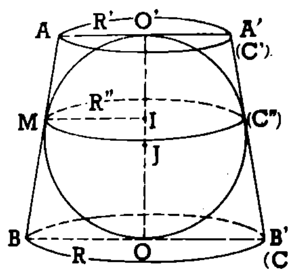
1. **Chứng-tỏ rằng $h^2 = 4RR'$ và $\frac{2}{R''} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R'}$**

2. **Khai-triển bề mặt xung-quanh của hình nón cụt thì được hai cung tròn bán-kính X và X', góc đỉnh ứng với cả hai cung đó là α. Tính X và X'. Tính α bằng radian khi R = 2R'.**

BÀI GIẢI

1. Hệ-thức $h^2 = 4RR'$.

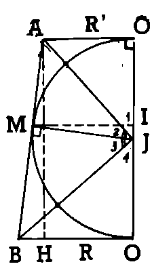
Cắt hình nón cụt và hình cầu bằng một mặt phẳng chứa OO', ta được một hình thang cân AA'B'B (đáy nhỏ là 2R', đáy lớn là 2R, chiều cao là $OO' = h$) và một vòng tròn đường kính OO' nội-tiếp trong hình thang cân đó.



Hình 125

OO' là trục đối-xứng của hình vẽ phẳng.

Ta hạ AH thẳng góc với BO. Hình chữ-nhật AO'OH cho ta $AH = h$, $HO = R'$.



Hình 126

Áp-dụng định-lý Pythagore vào tam-giác vuông góc AHB, ta có :

$$AB^2 = AH^2 + HB^2 \qquad (1)$$

Gọi M là tiếp-điểm của AB với vòng tròn, ta có : $AM = AO' = R'$, $BM = BO = R$.

Vậy $AB = AM + MB = R' + R$.

Ngoài ra $AH = h$ và $BH = R - R'$.

Hệ-thức (1) thành ra :

$$(R + R')^2 = h^2 + (R - R')^2$$

$$R^2 + R'^2 + 2RR' = h^2 + R^2 + R'^2 - 2RR'$$

Suy ra : $$h^2 = 4RR'$$

Hệ-thức $\dfrac{2}{R''} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R'}$

Hạ MI thẳng góc với OO'. MI là bán-kính của vòng tiếp-xúc (C) của hình nón và hình cầu. Vậy $MI = R''$.

Gọi J là trung-điểm của OO'.

Hai tam-giác đồng-dạng ABH, MJI cho ta:

$$\frac{AB}{MJ} = \frac{AH}{MI} \qquad \left(MJ = \frac{OO'}{2} = \frac{h}{2}\right)$$

hay $\dfrac{R + R'}{\frac{h}{2}} = \dfrac{h}{R''}$ tức là $2(R + R')R'' = h^2$

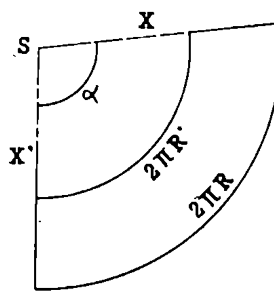
Nhưng $h^2 = 4RR'$ cho nên $2(R + R')R'' = 4AR'$

Suy ra $\dfrac{2}{R''} = \dfrac{R + R'}{R \cdot R'}$; $\dfrac{2}{R''} = \dfrac{1}{R} + \dfrac{1}{R'}$

2. Cách tính X và X'.

Khi khai-triển bề mặt xung-quanh của hình nón cụt thì ta được một phần hình vành khăn như ở hình bên cạnh.

Hai cung giới-hạn của phần hình vành khăn đó có số đo là $2\pi R'$ và $2\pi R$. Tâm của những vòng tròn chứa 2 cung đó là S, gọi bán-kính những vòng đó là X' và X (X > X'), góc đỉnh của những hình quạt là α.



Hình 127

Công-thức để tính α bằng radian là:

$$\alpha = 2\pi \frac{R'}{X'} \text{ (đối với cung nhỏ)}$$

$$\alpha = 2\pi \frac{R}{X} \text{ (đối với cung lớn)}$$

Nhờ đó, ta có $\dfrac{R}{X} = \dfrac{R'}{X'}$

Ta suy ra $\dfrac{R}{X} = \dfrac{R'}{X'} = \dfrac{R - R'}{X - X'} = \dfrac{R - R'}{AB} = \dfrac{R - R'}{R + R'}$

Do đó $X = \dfrac{R(R + R')}{R - R'}$ $\qquad X' = \dfrac{R'(R + R')}{R - R'}$

Cách tính α khi $R = 2R'$.

Công-thức vừa tìm thấy cho ta (khi $R = 2R'$) :

$$X = \frac{R(R+R')}{R-R'} = \frac{2R' \cdot 3R'}{R'} = 6R', \qquad X' = \frac{R'(R+R')}{R-R'} = 3R'$$

Thế mà $\alpha = 2\pi \frac{R'}{X'} = 2\pi \frac{R'}{3R'}$ nên $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ **radian.**

TOÁN

Cho một hình tam-giác đều ABC, cạnh bằng 2a (a = đoạn cho sẵn). Gọi O là tâm vòng tròn nội-tiếp. Cho hình vẽ quay quanh đường cao AH thì tam-giác ABC sinh ra một hình nón tròn xoay, vòng tròn nội-tiếp sinh ra một hình cầu tiếp-xúc với bề mặt xung-quanh và bề mặt đáy của hình nón. Ta gọi (S) là cố-thể ở trong hình nón và ở ngoài hình cầu. Ta cắt (S) bằng một mặt phẳng thẳng góc với AH tại một điểm K. Đặt AK = x.

1. **Tính diện-tích y của thiết-diện.**
2. **Biến-thiên của y theo x. Đường biểu-diễn.**
3. **Định x để cho $y = l^2$ (l^2 là số cho sẵn). Biện-luận.**

BÀI GIẢI

1. Diện-tích y của thiết-diện.

Ta coi tam-giác đều ABC (cạnh bằng $2a$) và vòng tròn nội-tiếp O. Nhờ tính-chất của tam-giác đều ta biết :

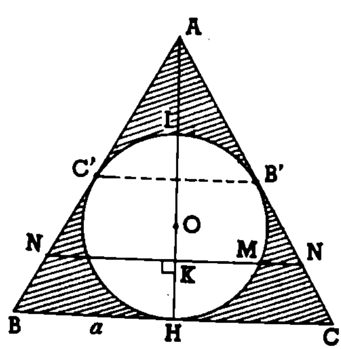
$$AH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$AO = \frac{2}{3}\,AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$OH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

(I là giao-điểm thứ nhì của HA với vòng O).



Hình 128

Ta coi phần bề mặt gạc chéo, ở trong tam-giác ABC và ở ngoài vòng tròn O.

Ta kẻ một đường thẳng góc với AH tại K, nó có thể cắt vòng O tại M, M' và cắt AB, BC tại N', N.

Khi ta cho hình vẽ quay quanh trục AH thì tam-giác ABC gây nên một hình nón tròn xoay, vòng tròn O gây nên một hình cầu, và bề mặt gạc chéo gây nên cố-thể (S) ở *trong* hình nón và ở *ngoài* hình cầu.

Hai điểm M và N gây nên những vòng tròn tâm K, bán-kính KM, KN và nằm trong mặt phẳng thẳng góc với AH tại K.

Ta hãy tính diện-tích hai vòng đó. Hiệu-số hai diện-tích đó là diện-tích y của thiết-diện mà ta muốn tìm. (K phải ở trên đoạn IH).

Dùng tam-giác vuông góc AKN, ta có :

$$KN = AK \operatorname{tg} 30^o = \frac{x\sqrt{3}}{3}$$

Trong vòng O, ta có :

$$KM^2 = KI \times KH \begin{cases} KI = AK - AI = x - \dfrac{a\sqrt{3}}{3} \\ KH = AH - AK = a\sqrt{3} - x \end{cases}$$

$$KM^2 = \left(x - \frac{a\sqrt{3}}{3}\right)\left(a\sqrt{3} - x\right) = -x^2 + \frac{4a\sqrt{3}}{3}x - a^2$$

Ta có :

$$y = \pi\, KN^2 - \pi\, KM^2$$

$$y = \pi\,(KN^2 - KM^2)$$

$$= \pi\left[\frac{x^2}{3} - \left(-x^2 + \frac{4a\sqrt{3}}{3}\,x - a^2\right)\right]$$

$$= \pi\left[\frac{4x^2}{3} - \frac{4a\sqrt{3}}{3}\,x + a^2\right]$$

$$y = \frac{\pi}{3}\left[4x^2 - 4a\sqrt{3}\,x + 3a^2\right]$$

Trong trường-hợp mà K ở trên đoạn AI, ta không có vòng (K,KM) diện-tích y rút lại chỉ còn là :

$$y = \pi\, KN^2 = \pi\,\frac{x^2}{3} = \frac{\pi}{3}\,x^2$$

Tóm lại:

a) Nếu K ở trên đoạn AI, tức là $0 \leq x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$ thì:

$$y = \pi\, KN^2 = \frac{\pi}{3}\, x^2$$

b) Nếu K ở trên đoạn IH, tức là $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x \leq a\sqrt{3}$ thì:

$$y = \pi\,(KN^2 - KM^2) = \frac{\pi}{3}\,(4x^2 - 4a\sqrt{3}x + 3a^2)$$

2. Biến-thiên của y. Đường biểu-diễn.

a) $0 \leq x \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$ $\qquad y = \frac{\pi}{3}\, x^2$

y là một hàm-số bậc hai đơn-giản của x. Trong khoảng mà ta đã định cho x thì y đồng-biến. Đường *biểu-diễn* là một cung parabol; parabol này nhận gốc tọa-độ làm đỉnh và đi qua điểm $\left(x = \frac{a\sqrt{3}}{3} \quad y = \frac{\pi a^2}{9}\right)$

x	0	$\nearrow$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$
y	0	$\nearrow$	$\frac{\pi a^2}{9}$

b) $\frac{a\sqrt{3}}{3} < x \leq a\sqrt{3}$ $\qquad y = \frac{\pi}{3}\,(4x^2 - 4a\sqrt{3}\,x + 3a^2)$

Đạo-hàm là $y' = \frac{\pi}{3}\,(8x - 4a\sqrt{3})$

Nghiệm-số của đạo-hàm là $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Lúc $x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ thì $y' = 0$ và $y = 0$.

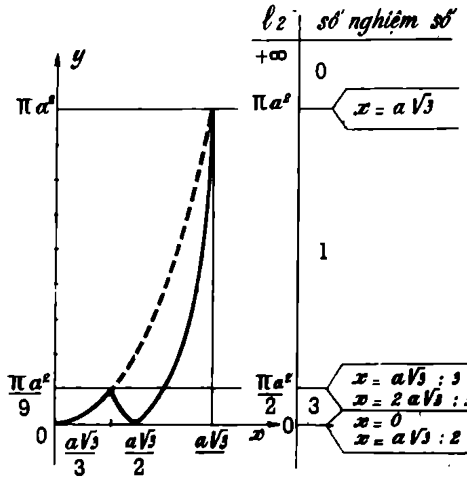
Bảng biến-thiên:

x	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$		$\frac{a\sqrt{3}}{2}$		$a\sqrt{3}$
y'		$-$	0	$+$	
y	$\frac{\pi a^2}{9}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	πa^2

Đường *biểu-diễn* là một cung parabol.

3. Cách định x để cho $y = l^2$.

Ta vẽ một đường thẳng Δ nằm ngang mà phương-trình là $y = l^2$ (hằng-số). Hoành-độ giao-điểm của Δ với đường biểu-diễn là trị-số của x mà ta phải tìm. Bảng biện-luận được đặt ngay bên đồ-thị.



Hình 129

19

Hình cầu

1. ĐỊNH-NGHĨA.

19. 1. ĐỊNH-NGHĨA.

Hình cầu là quỹ-tích những điểm trong không-gian cách đều một điểm cố-định.

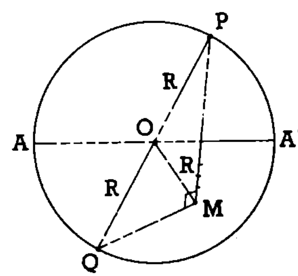
Điểm cố-định đó gọi là *tâm* ; khoảng cách từ tâm đến mỗi điểm trên hình cầu là *bán-kính.*

Một hình cầu được định rõ bằng tâm và bán-kính của nó.

Coi hình cầu tâm O, bán-kính R. Một đường thẳng đi qua O, cắt hình cầu tại hai điểm A, A', OA' = OA = R.

AA' gọi là một *đường kính.*

Hai điểm như A, A' gọi là hai điểm *đối-tâm* hay *xuyên-tâm-đối.*



Hình 130

19. 2. QUỸ-TÍCH.

Cho một đoạn cố-định PQ. Tìm quỹ-tích những điểm M, biết rằng M nhìn PQ dưới một góc vuông.

Gọi O là trung-điểm PQ (*h. 130).* O cố-định.

Trong tam-giác PMQ, MO là trung-tuyến. Một *điều-kiện ắt có và đủ* để cho góc PMQ vuông là $MO = \frac{PQ}{2}$ = hằng-số.

Quỹ-tích của M là hình cầu tâm O, bán-kính $\frac{PQ}{2}$ tức là hình cầu đường kính PQ.

Vậy hình cầu đường kính PQ là quỹ-tích những điểm nhìn đoạn cố-định PQ dưới một góc vuông.

19. 3. SỰ TRÒN XOAY CỦA HÌNH CẦU.

Khi một vòng tròn quay quanh một đường kính thì nó gây nên một hình cầu.

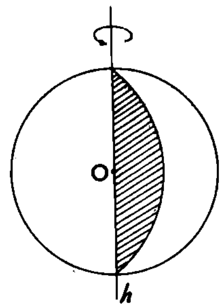
Vậy : *hình cầu là một hình tròn xoay.*

Ta sẽ lợi-dụng sự tròn xoay đó để khảo-sát nhiều điều về sau.

19. 4. SỰ ĐỐI-XỨNG CỦA HÌNH CẦU.

Tâm O là *tâm đối-xứng* của hình cầu. Trong hình cầu, bất-cứ đường kính nào cũng có thể dùng làm *trục đối-xứng* ; bất-cứ mặt phẳng nào qua tâm O cũng có thể dùng làm *mặt đối-xứng.*

Một mặt phẳng đi qua tâm được gọi là *mặt kính.*



Hình 131

19. 5. MIỀN.

Một hình cầu chia không-gian ra làm hai miền : *miền trong* và *miền ngoài.* Miềm trong là miền có chứa tâm.

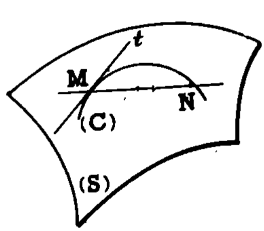
— Nếu OA = R thì A nằm *trên* hình cầu,

— Nếu OB > R thì B nằm *ngoài* hình cầu,

— Nếu OC < R thì C nằm *trong* hình cầu và *đảo lại.*

2. TIẾP-TUYẾN — MẶT PHẲNG TIẾP-XÚC.

19. 5. ĐỊNH-NGHĨA TIẾP-TUYẾN.



Hình 132

Coi một mặt cong (S) trên đó có một đường cong (C). Gọi M là một điểm cố-định trên (C) và gọi N là một điểm lưu-động trên (C). MN là một *cát-tuyến* của S.

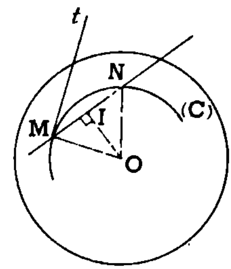
Cho N tiến tới M. MN tiến tới vị-trí giới-hạn M*t*. M*t* gọi là *tiếp-tuyến* của đường cong (C) tại M. Ta nói rằng : M*t* là *tiếp-tuyến của mặt cong (S) tại điểm M.*

19. 6. ĐỊNH-LÝ.

Những tiếp-tuyến của một hình cầu O tại một điểm M đều nằm trên một mặt phẳng. Đó là mặt P thẳng góc với bán-kính OM tại M.

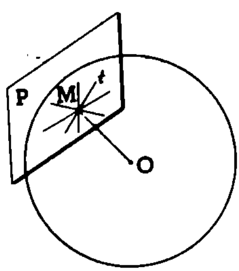
Coi hình cầu O trên đó có một điểm M. Gọi (C) là một đường cong đi qua M, vẽ trên hình cầu. Xét cát-tuyến MN. Tam-giác OMN cân vì OM = ON. Gọi I là trung-điểm MN. Ta biết rằng OI là đường cao của tam-giác cân OMN.

Khi N tiến tới M thì I cũng tiến tới M. MN tiến tới vị-trí M*t*, tiếp-tuyến của hình cầu tại M ; OI tiến tới vị-trí OM, góc vuông OIN có vị-trí giới-hạn là góc OM*t*, vậy OM thẳng góc với M*t* (*h. 133*).



Hình 133

Qua M, có vô số đường cong (C) nên có vô-số tiếp-tuyến M*t*.



Hình 134

Tất cả các tiếp-tuyến M*t* đều thẳng góc với OM tại M. Quỹ-tích của M*t* là mặt phẳng P thẳng góc với OM tại M. P gọi là mặt tiếp-xúc của hình cầu tại M (*h. 134*).

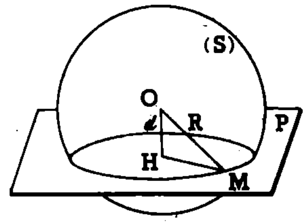
19. 7. CHÚ-THÍCH.

Người ta chứng-minh rằng tại mỗi điểm M của một hình trụ hay một hình nón, có vô-số tiếp-tuyến và những tiếp-tuyến đó cùng nằm trong một mặt phẳng. Mặt tiếp-xúc đó được định bởi đường sinh đi qua M, và tiếp-tuyến của đường chuẩn tại nơi mà đường sinh đó cắt đường chuẩn.

3. SỰ TƯƠNG-GIAO CỦA MỘT HÌNH CẦU VÀ MỘT MẶT PHẲNG.

19. 8. ĐỊNH-LÝ.

Giao-tuyến (đường tương-giao) của một mặt phẳng và một hình cầu là một vòng tròn. Tâm của vòng tròn đó là hình chiếu của tâm hình cầu xuống mặt phẳng.



Hình 135

Ta coi mặt phẳng P và hình cầu (S), tâm O, bán-kính R. Gọi hình chiếu của tâm O xuống P là H. Đặt OH = *d*.

Lấy một điểm M trên P, tam-giác vuông góc OHM cho ta :

$$OH^2 + HM^2 = OM^2 \qquad (1)$$

Đảo lại, nếu có hệ-thức (1) thì

góc OHM = 90°, OH $\perp$ HM và M nằm trong P.

Điều-kiện ắt có và đủ để cho M ở trên hình cầu là OM = R. Hệ-thức (1) thành ra :

$$d^2 + HM^2 = R^2$$
$$HM^2 = R^2 - d^2$$

— Với điều-kiện $R > d$, ta có $HM = \sqrt{R^2 - d^2}$ = hằng-số.

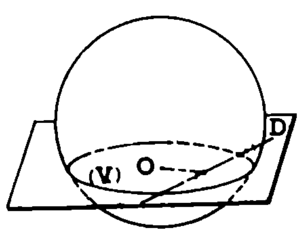
Quỹ-tích của M là vòng tròn tâm H, bán-kính là $\sqrt{R^2 - d^2}$, dựng trong P.

— Nếu $R = d$ thì HM = 0, vòng tròn rút lại là một điểm H. Ta nói rằng mặt phẳng P và hình cầu (S) *tiếp-xúc* với nhau tại H.

— Nếu $R < d$ thì không thể tính được HM, nghĩa là P và (S) không có điểm nào chung. Ta nói rằng mặt phẳng *ở ngoài* hình cầu.

— Nếu $d = 0$ thì H ở O và $HM = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{R^2 - 0} = R$. Vòng tương-giao của P và S là một vòng tâm O, bán-kính R. Ta gọi vòng ấy là một *vòng lớn* của hình cầu ; vòng ấy lớn hơn những vòng tương-giao khi mà mặt phẳng P không đi qua O, gọi là *vòng nhỏ*.

19. 9. VỊ-TRÍ TỈ-ĐỐI CỦA MỘT MẶT PHẲNG VÀ MỘT HÌNH CẦU.



Hình 136

Sự khảo-sát ở trên cho chúng ta kết-luận rằng : *Có ba vị-trí tỉ-đối giữa một mặt phẳng và một hình cầu :*

— hoặc chúng *cắt* nhau theo một vòng tròn.

— hoặc chúng *tiếp-xúc* với nhau tại một điểm.

— hoặc mặt phẳng ở *ngoài* hình cầu.

19. 10. VỊ-TRÍ TỈ-ĐỐI CỦA MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ MỘT HÌNH CẦU.

Coi hình cầu (O, R) và đường thẳng D. Mặt phẳng (O, D) cắt hình cầu theo một vòng lớn (V). Khảo-sát vị-trí tỉ-đối của hình cầu (O) và đường D rút lại là sự khảo-sát vị-trí tỉ-đối của vòng (V) và đường D. D có thể không cắt, tiếp-xúc, hay cắt (V) tại hai điểm.

Khi một đường thẳng cắt một hình cầu thì chỉ cắt được tại hai điểm làm cùng. Nói khác đi, ba điểm ở trên một hình cầu không khi nào thẳng hàng được.

4. VÒNG TRÒN VẼ TRÊN HÌNH CẦU.

19.11. ĐỊNH-LÝ.

Qua ba điểm lấy trên một hình cầu, ta chỉ có thể vẽ được một vòng tròn thôi.

Ta đã biết ba điểm A, B, C của một hình cầu không thể thẳng hàng. Vậy chúng định được một mặt phẳng. Mặt phẳng đó cắt hình cầu theo một vòng tròn (V), (V) chính là vòng tròn độc-nhất đi qua ba điểm A, B, C.

19.12. HỆ-LUẬN.

1. Nếu một vòng tròn có ba điểm nằm trên một hình cầu thì nó hoàn-toàn nằm trên hình cầu đó.

2. Nếu một vòng tròn không nằm trên một hình cầu thì nó chỉ có thể cắt hình cầu tại hai điểm là cùng.

19.13. ĐỊNH-LÝ.

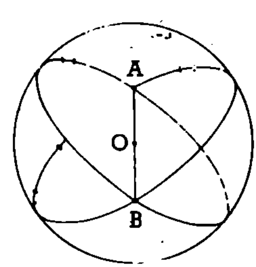
Qua hai điểm không đối-tâm của một hình cầu, ta có thể vẽ được một vòng lớn chỉ một thôi.

Thật thế, hai điểm không đối-tâm A, B và tâm O của hình cầu định một mặt kính độc-nhất. Mặt đó cắt hình cầu theo một vòng lớn độc-nhất.

19.14. HỆ-LUẬN.

Hai vòng lớn của một hình cầu cắt nhau tại hai điểm đối-tâm.

Thật thế, hai mặt phẳng chứa hai vòng lớn là hai mặt kính. Hai mặt kính đó cắt nhau theo một đường thẳng đi qua tâm. Vậy giao-điểm của hai vòng lớn là hai đầu của một đường kính. Nói khác đi, chúng là hai điểm đối-tâm.



Hình 137

19. 15. CỰC CỦA MỘT VÒNG TRÒN VẼ TRÊN MỘT HÌNH CẦU.

Coi một vòng tròn (V) vẽ trên một hình cầu. Trục của vòng tròn đó cắt hình cầu tại P, P'. P và P' gọi là cực của vòng (V).

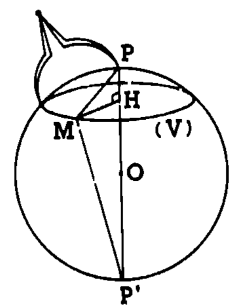
Trục PP' đi qua tâm H của vòng (V), và qua tâm O của hình cầu.

Khoảng cách từ một điểm M lấy trên một vòng tròn vẽ trên một hình cầu tới một cực là một đoạn không đổi.

Thật vậy, P nằm trên trục của (V) nên P cách đều mọi điểm của (V).

Khoảng cách PM gọi là **bán-kính cực.**

Mỗi điểm M ở trên (C) có hai bán-kính cực là PM và P'M.



Hình 138

19. 16. ĐỊNH-LÝ.

Tất cả những điểm của một hình cầu mà khoảng cách tới một điểm P lấy trên hình cầu là hằng-số đều nằm trên một vòng tròn.

Gọi P' là điểm đối-tâm của P. Giả-sử ta có một điểm M nằm trên hình cầu thỏa cho điều-kiện PM = hằng-số $<$ PP' (tức 2R). Các tam-giác vuông góc như PMP' bằng nhau cả (PP' chung, PM không đổi).

Vậy các chiều cao MH của chúng đều có chân chung là H và dài bằng nhau. Quỹ-tích của M là vòng tròn (V) tâm H, dựng trong mặt phẳng thẳng góc với PP' tại H.

Câu hỏi. Cho OP = R ; OH = d. Hãy tính PM và P'M.

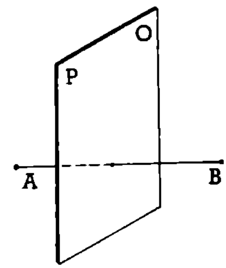
5. CÁCH ĐỊNH MỘT HÌNH CẦU.

19. 17. HÌNH CẦU QUA HAI ĐIỂM.

ĐỊNH-LÝ. Quỹ-tích tâm những hình cầu đi qua hai điểm A, B là mặt trung-trực của đoạn AB.

Muốn cho O là tâm một hình cầu qua A, B thì ta *phải có và chỉ cần có*: OA = OB. Như thế, O cách đều A, B. Vậy quỹ-tích của O là mặt trung-trực của đoạn AB.

Hai điểm A, B *không đủ* định rõ một hình cầu, vì qua A, B có *vô-số* hình cầu.

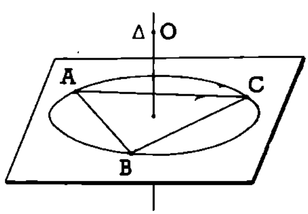


Hình 139

19. 18. HÌNH CẦU QUA BA ĐIỂM KHÔNG THẲNG HÀNG.

ĐỊNH-LÝ. Quỹ-tích tâm những hình cầu đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng là trục của vòng tròn qua A, B, C.

Muốn cho O là tâm của hình cầu đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì ta *phải có và chỉ cần có*: OA = OB = OC. Như thế, O cách đều A, B, C. Quỹ-tích của O là trục của vòng tròn ABC.



Hình 140

Ba điểm không thẳng hàng A, B, C *không đủ* định rõ một hình cầu, vì qua A, B, C có *vô-số* hình cầu.

19. 18. HÌNH CẦU QUA BỐN ĐIỂM KHÔNG CÙNG Ở TRONG MỘT MẶT PHẲNG.

ĐỊNH-LÝ. Qua bốn điểm không cùng ở trong một mặt phẳng, có một hình cầu và chỉ một thôi.

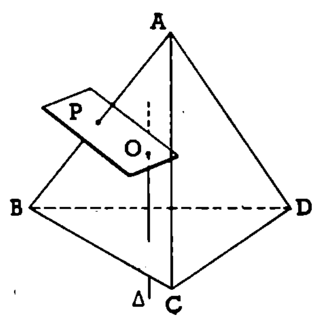
Coi tứ-diện ABCD. Ta hãy tìm tâm hình cầu đi qua 4 điểm A,B,C,D.

Gọi O là tâm hình cầu đó. Ta có OA = OB = OC = OD.

Vì OD = OB = OC, nên O nằm trên trục Δ của vòng tròn ngoại-tiếp với tam-giác DBC.

Vì OA = OB, nên O nằm trên mặt trung-trực P của đoạn AB.

Do đó, O là giao-điểm của Δ và P. Δ và P nhất-định cắt nhau vì nếu không cắt nhau thì P song-song với Δ tức là P thẳng-góc với mặt



Hình 141

DBC. Lúc đó AB (thẳng góc với P) nằm trong mặt DBC ; tức là bốn điểm A, B, C, D cùng ở trên một mặt phẳng, tứ-diện không có nữa.

19. 19. **HỆ-LUẬN.**

1. **Qua một vòng tròn và một điểm ở ngoài mặt phẳng của vòng đó, chỉ có một hình cầu độc-nhất.**

Thật thế, hãy lấy ba điểm A, B, C ở trên vòng tròn. A, B, C và điểm D ở ngoài mặt vòng tròn tạo nên một tứ-diện ABCD. Tứ-diện đó chỉ có một hình cầu ngoại-tiếp.

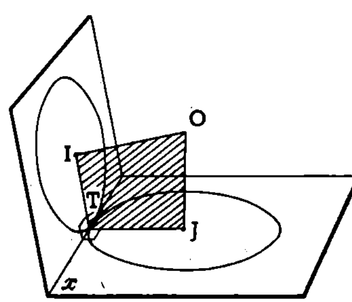
2. **Qua hai vòng tròn cắt nhau tại hai điểm và không cùng ở trên một mặt phẳng, chỉ có một hình cầu độc-nhất.**

Gọi hai giao-điểm của hai vòng tròn là A, B. Lấy một điểm C trên vòng thứ nhất, một điểm D trên vòng thứ nhì. Ta được bốn điểm A, B, C, D, và như thế là trở về trường-hợp đã xét ở định-lý trên.

19. 20. **ĐỊNH-LÝ.**

Qua hai vòng tròn tiếp-xúc nhau và không cùng ở trong một mặt phẳng có một hình cầu độc-nhất.

Hai vòng tròn I và J đựng trong hai mặt phẳng khác nhau và có tiếp-tuyến Tx chung. Tx là giao-tuyến của hai mặt phẳng. Như thế, Tx thẳng góc với hai bán-kính JT và IT của hai vòng, tức là Tx thẳng góc với mặt phẳng JIT. Trục của vòng I trực-giao với Tx vì Tx đựng trong mặt phẳng vòng I. Cũng vậy, trục của vòng J trực-giao với Tx. Do đó, hai trục ấy nằm trong mặt phẳng JIT. Chúng phải cắt nhau vì nếu song-song thì JIT thẳng hàng, trái giả-thiết ! Hình cầu tâm O, bán-kính OT chứa cả hai vòng I, J.



Hình 142

Chú-ý : **Người ta định một hình cầu bằng :**

— tâm và bán-kính của nó.

— bốn điểm không cùng ở trong một mặt phẳng

— một vòng tròn và một điểm ở ngoài mặt phẳng của vòng đó.

— hai vòng tròn tương-giao, không cùng ở trong một mặt phẳng.

— hai vòng tròn tiếp-xúc, không cùng ở trong một mặt phẳng.

6. SỰ TƯƠNG-GIAO CỦA HAI HÌNH CẦU.

19. 21. Ta coi hai vòng tròn O và O', bán-kính lần-lượt là R và R'.

Giả-sử chúng cắt nhau ở A và B. A và B đối-xứng nhau qua đường tâm OO'. Nối AB; AB thẳng góc với OO' tại H.

Cho hình vẽ quay quanh trục OO' thì ta được hai hình cầu. Điểm A gây nên một vòng tròn tâm H, bán-kính HA ; vòng này nhận OO' làm trục, nghĩa là nó nằm trong mặt phẳng thẳng góc với OO' tại H. Vậy ta có :

ĐỊNH-LÝ.

Khi hai hình cầu có một điểm chung A không nằm trên đường tâm thì chúng có một vòng tròn chung. Vòng đó gọi là vòng tương-giao của hai hình cầu.

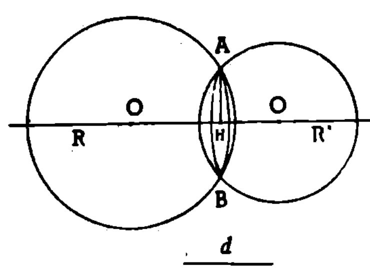
Chú-ý. Khi hai hình cầu có một điểm chung nằm trên đường tâm thì ta nói rằng chúng tiếp-xúc nhau.

19. 22. VỊ-TRÍ TỈ-ĐỐI CỦA HAI HÌNH CẦU.

Coi hai vòng tròn O, O', bán-kính R, R'.

Cho hình vẽ quay quanh trục OO' thì được hai hình cầu.

Vị-trí tỉ-đối của hai hình cầu cũng là vị-trí tỉ-đối của hai vòng tròn nghĩa là :



Hình 143

$\lvert R - R' \rvert < d < R + R'$	2 hình cầu *cắt nhau.*
$d < \lvert R - R' \rvert$	2 hình cầu ở *trong nhau.*
$d = \lvert R - R' \rvert$	2 hình cầu *tiếp-xúc trong.*

$d = R + R'$	2 hình cầu *tiếp-xúc ngoài.*
$d > R + R'$	2 hình cầu *ở ngoài nhau.*
$d = 0$	2 hình cầu *đồng-tâm.*

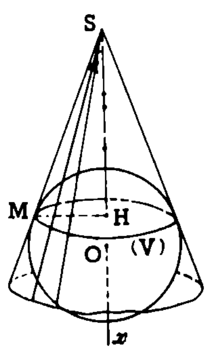
7. MẶT TRỤ VÀ MẶT NÓN TIẾP-XÚC VỚI MỘT HÌNH CẦU.

19. 23. Coi một vòng tròn tâm O và một điểm S ở ngoài. Kẻ tiếp-tuyến SM rồi hạ MH thẳng góc với SO.

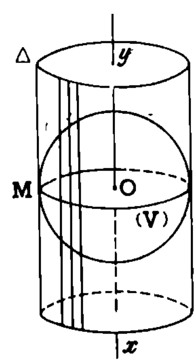
Cho hình vẽ quay quanh trục SO, vòng tròn (O) gây nên một hình cầu *(h. 144)*. Điểm M gây nên một vòng tròn (V), tâm H, trục là SO.

Đường SM gây nên một mặt nón tròn xoay, đỉnh là S, đường chuẩn là vòng tròn (V), nửa góc đỉnh là MSO = α.

Mặt nón đó gọi là *mặt nón ngoại-tiếp với hình cầu.* Đó là quỹ-tích những tiếp-tuyến của hình cầu, phát-xuất từ S. Vòng (V) gọi là *vòng tiếp-xúc*. Đó là quỹ-tích những tiếp-điểm.



Hình 144



Hình 145

19. 24. Coi một vòng tâm O và một đường *xy* đi qua O. Kẻ đường thẳng Δ song-song *xy* và tiếp-xúc với vòng O tại M.

Cho vẽ hình quay quanh trục *xy*, vòng tròn (O) gây nên một hình cầu *(h. 145)*. Điểm M gây nên một vòng tròn (V), tâm O, trục là *xy*. Đường Δ gây nên một mặt trụ tròn xoay, đường chuẩn là vòng là (V).

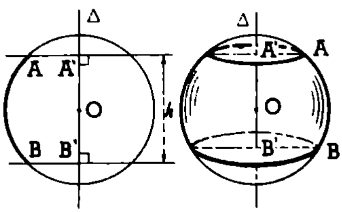
Mặt trụ đó gọi là *mặt trụ ngoại-tiếp với hình cầu*. Đó là quỹ-tích những tiếp-tuyến của hình cầu, song-song với *xy*. Vòng (V) gọi là *vòng tiếp-xúc*. Đó là quỹ-tích những tiếp-điểm.

8. DIỆN-TÍCH HÌNH CẦU.

19. 25. CẦU-ĐỚI.

***1.* Cầu-đới là một phần của bề mặt hình cầu giới-hạn bởi hai mặt phẳng song-song.**

2. Coi một vòng O, bán-kính R, trên đó ta lấy một cung AB. Hạ AA', BB' thẳng góc với đường kính Δ (Δ không xuyên qua AB). Khi cho hình vẽ quay quanh Δ, cung $\overset{\frown}{AB}$ gây ra một *cầu-đới*, cung $\overset{\frown}{AB}$ gọi là *cung sinh*. A và B gây nên những vòng tròn mà trục là Δ. Đó là hai vòng *đáy* của *cầu-đới*. Khoảng cách A'B' = *h* của hai mặt đáy gọi là *chiều cao* của cầu-đới.



Hình 162

***3.* Diện-tích của cầu-đới bằng tích-số chiều cao với chu-vi một vòng tròn lớn của hình cầu mang cầu-đới đó :**

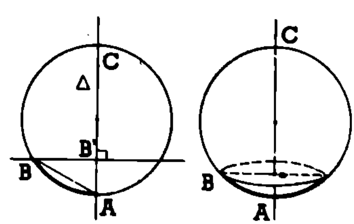
$$\boxed{\mathcal{S} = 2\pi R \cdot h}$$

***4.* Trong một hình cầu, tỉ-số hai cầu-đới bằng tỉ-số chiều cao.**

19. 26. CHỎM CẦU.

1. Khi điểm A của cung sinh AB nằm trên trục quay Δ thì cung AB sinh ra một cầu-đới đặc-biệt chỉ có một đáy : đó là hình *chỏm cầu*.

Dây cung PA gọi là *bán-kính cực* của chỏm cầu. A gọi là *đỉnh* của chỏm cầu, AB' là *chiều cao*.



Hình 147

***2.* Diện-tích của chỏm cầu bằng tích-số chiều cao với chu-vi một vòng tròn lớn của hình cầu mang chỏm cầu đó :**

$$\boxed{\mathcal{S} = 2\pi R \cdot h}$$

3. Ta chú-ý rằng trong tam-giác vuông góc ABC, ta có:

$$AB' \times AC = AB^2$$

tức là

$$h \times 2R = AB^2$$

và

$$\mathcal{S} = 2\pi R \cdot h = \boxed{\pi AB^2}$$

Vậy : **diện-tích của chỏm cầu bằng diện-tích của hình tròn mà bán-kính bằng bán-kính cực của chỏm cầu.**

4. Ta phải nhớ rằng ta không tính thể-tích của hình chỏm cầu và hình cầu-đới. Hai hình đó chỉ có diện-tích thôi.

19. 27. DIỆN-TÍCH HÌNH CẦU.

1. Ta có thể coi hình cầu như là một cầu-đới mà chiều cao là $h = 2R$. Vì thế, diện-tích của hình cầu là :

$$\mathcal{S} = 2\pi R \times 2R = \boxed{4\pi R^2}$$

Diện-tích của hình cầu bằng bốn lần diện-tích của một vòng lớn.

2. Gọi đường kính là $d = 2R$, diện-tích hình cầu là:

$$\mathcal{S} = 4\pi R^2 = \pi (2R)^2 = \boxed{\pi d^2}$$

3. Coi hai hình cầu mà diện-tích là:

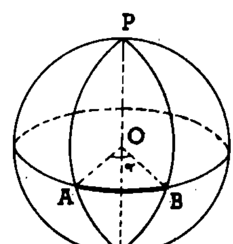
$\mathcal{S}_1 = 4\pi R_1^2$ và $\mathcal{S}_2 = 4\pi R_2^2$. Tỉ-số là :

$$\frac{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}_2} = \frac{4\pi R_1^2}{4\pi R_2^2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$$

Tỉ-số diện-tích hai hình cầu bằng bình-phương của tỉ-số bán-kính.

19. 28. DIỆN-TÍCH HÌNH MÚI CẦU.

1. **Hình múi cầu là phần của mặt cầu ở trong khoảng một nhị-diện mà cạnh là một đường kính của hình cầu.**



Hình 148

2. Gọi α (độ) là số đo của nhị-diện, diện-tích của hình múi cầu là :

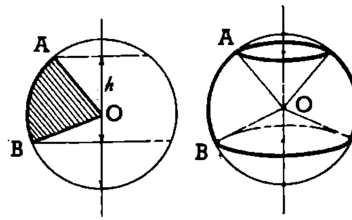
$$\mathcal{S} = \frac{4\pi R^2 \times \alpha}{360} = \boxed{\frac{\pi R^2 \alpha}{90}}$$

9. THỂ-TÍCH HÌNH CẦU.

19. 29. HÌNH QUẠT CẦU.

1. **Hình quạt cầu là cố-thể gây ra bởi một hình quạt tròn khi nó quay xung - quanh một đường kính không xuyên qua nó.**

Hình quạt OAB gọi là *hình quạt sinh.*



Hình 149

Cầu-đới gây bởi cung $\overset{\frown}{AB}$ là *cầu-đới đáy* của hình quạt cầu. Chiều cao h của cầu-đới đáy cũng là *chiều cao* h của hình quạt cầu.

2. *Thể-tích* hình quạt cầu tính theo công-thức:

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

19. 30. THỂ-TÍCH HÌNH CẦU.

1. Ta có thể coi hình cầu như là một hình quạt cầu trong đó chiều cao $h = 2R$. Do đó, thể-tích của hình cầu là:

$$\mathcal{V} = \frac{2}{3}\pi R^2 \times 2R = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Nếu gọi đường kính của hình cầu là $d = 2R$ tức $R = \frac{d}{2}$, ta có:

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 = \boxed{\frac{1}{6}\pi d^3}$$

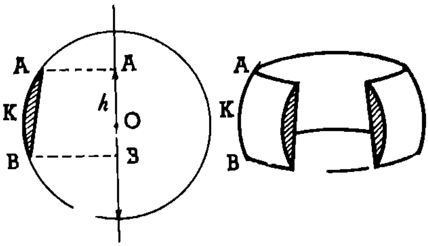
2. Coi hai hình cầu mà thể-tích là

$$\mathcal{V}_1 = \frac{4}{3}\pi R_1^3 \quad \text{và} \quad \mathcal{V}_2 = \frac{4}{3}\pi R_2 \quad \text{ta có:}$$

$$\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3$$

Tỉ-số thể-tích của hai hình cầu bằng tam-thừa của tỉ-số bán-kính.

19. 31. HÌNH VÀNH CẦU.



Hình 140

1. **Hình vành cầu là cố-thể gây bởi một hình viên-phân AKB khi nó quay quanh một đường kính không xuyên qua nó.**

2. Thể-tích của hình vành cầu là :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{6}\,\pi\,\mathbf{AB^2h}}$$

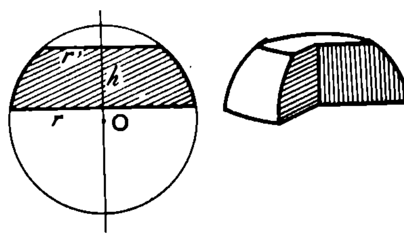
h là chiều cao của cầu-đới gây bởi *cung sinh* $\overset{\frown}{AB}$.

19. 32. HÌNH MÚI CẦU *(h 148).*

Thể-tích là :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3\,\frac{\alpha}{360} \qquad (\alpha \text{ độ})$$

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{\pi\,\mathbf{R^3}\,\alpha}{\mathbf{270}}}$$

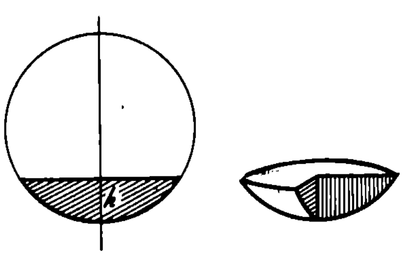


Hình 151

19. 32. HÌNH CẦU-PHÂN HAI ĐÁY *(h. 151).*

1. **Hình cầu-phân hai đáy là phần của khối cầu ở trong khoảng hai thiết-diện phẳng song-song.**

2. Gọi *r*, *r'* là bán-kính hai hình tròn thiết-diện và *h* là chiều cao (tức khoảng-cách của hai mặt cắt song-song) ; thể-tích hình cầu-phân hai đáy là :



Hình 152

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{6}\,\pi\,\mathbf{h^3} + \frac{1}{2}\,\pi\,\mathbf{h}\,(\mathbf{r^2} + \mathbf{r'^2})}$$

3. Trong trường-hợp hình cầu-phân một đáy (*h. 152*), ta dùng công-thức :

$$\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)}$$

BÀI TẬP

19. 1. *Cho hai hình cầu đồng-tâm O, bán-kính lần-lượt là R, R'. Cắt hai hình cầu đó bằng một mặt phẳng cách O một khoảng x. Chứng-tỏ diện-tích hình vành khăn giới-hạn bởi hai vòng tròn thiết-diện là một hằng-số.*

19. 1*b*. *Tính bán-kính hình cầu ngoại-tiếp của một khối bốn mặt đều, cạnh là a. Tính bán-kính hình cầu nội-tiếp trong khối đó.*

19. 2. *Cho một tam-giác vuông và cân ABC (AB = AC = a). Lấy CB làm đường kính, vẽ một vòng tròn (Γ) dựng trong mặt phẳng thẳng góc với mặt phẳng ABC. Trên (Γ), lấy một điểm M.*

1. *Tính* $MB^2 + MC^2$.

2. *Định tâm và tính bán-kính hình cầu ngoại-tiếp của khối tứ-diện MABC.*

19. 3. *Cho một mặt phẳng P, trong đó có một tam-giác đều ABC nội-tiếp trong một vòng tròn bán-kính R, tâm O. Trên trục của vòng tròn O, lấy một điểm S, OS = x.*

1. *x bất-kỳ, chứng-tỏ rằng những góc ở S của hình tứ-diện SABC bằng nhau.*

2. *Tính x để mỗi góc nói trên bằng 90°.*

3. *x có trị-số vừa tìm thấy ở câu hai, coi điểm S' định bởi* $\overline{OS'} = -2\overline{OS}$. *Chứng-minh rằng năm điểm A, B, C, S, S' nằm trên một hình cầu.*

19. 4. *Cho một hình nón tròn xoay đỉnh S, bán-kính đáy R, chiều cao x. Trong vòng tròn đáy, có một tam-giác đều nội-tiếp ABC.*

1. *Tính x theo R để cho SABC là tứ-diện đều. Tính thể-tích của tứ-diện theo R. Trong những câu sau, x có trị-số vừa tìm thấy.*

2. *Định một điểm S' trên trục của hình nón để cho tam-diện S'ABC là tam-diện ba góc vuông (S' và S ở hai bên của mặt phẳng ABC). So-sánh thể-tích hai tứ-diện SABC và S'ABC.*

3. *Khảo-sát tam-giác SAS'.*

Định tâm hình cầu ngoại-tiếp của tứ-diện S'ABC. Có thể nói gì về hình cầu ngoại-tiếp của tứ-diện SABC ?

19. 5. *Cho một đoạn cố-định $AB = l$ trong một mặt phẳng P. Từ A, kẻ nửa đường thẳng Ax thẳng góc với P. Trên Ax, lấy đoạn $AO = AB = l$.*

1. Gọi C là một điểm của mặt P thỏa cho điều-kiện $\widehat{BAC} = 30^o$ và $\widehat{ACB} = 90^o$. Tính thể-tích khối OABC.

2. Trong mặt P, coi một đường thẳng D có thể quay quanh điểm cố-định B. Gọi M là chân đường thẳng góc hạ từ O xuống D. Quỹ-tích của M ?

3. Đặt $BM = x$. Tính theo l và x thể-tích của hình tháp OABM. Định M để cho thể-tích đó cực-đại.

4. Chứng-minh rằng đỉnh của các hình-tháp OABM nằm trên một hình cầu cố-định. Định tâm và tính bán-kính của hình cầu đó.

19. 6. *Cho một tam-giác đều ABC, cạnh là a. Kẻ nửa đường thẳng Az thẳng góc với mặt phẳng ABC. Trên Az, lấy đoạn $AS = x$.*

1. Định x để cho nhị-diện (S, BC, A) bằng 45^o.

2. Tính theo a và x bán-kính của hình cầu ngoại-tiếp của tứ-diện SABC.

3. Gọi M là điểm đối-tâm của A ở trên hình cầu. Quỹ-tích của M khi S vạch nên Az.

19. 7. *Cho ba nửa đường thẳng Ox, Oy, Oz thẳng góc nhau đôi một. Trên Ox, lấy một điểm A ; trên Oy, lấy một điểm B ; trên Oz, lấy một điểm C. AB cố-định, C lưu-động trên Oz.*

1. Gọi hình chiếu của O xuống mặt phẳng ABC là H. Chứng-tỏ rằng CH là một đường thẳng đáng chú-ý trong tam-giác ABC. Chứng-tỏ rằng CH đi qua một điểm cố-định và nằm trong một mặt phẳng cố-định. Quỹ-tích của H ?

2. Định rõ tâm S của hình cầu ngoại-tiếp với tứ-diện OABC. Quỹ-tích của S ?

3. Chứng-minh rằng ba hình cầu đường kính AB, BC, CA có một điểm chung O. Dùng một phép đối-xứng qua một mặt phẳng để tìm ra một điểm chung thứ nhì O' của ba hình cầu. Quỹ-tích của O' ?

19. 8. *Cho ba nửa đường thẳng Ox, Oy, Oz thẳng góc nhau đôi một. Gọi A, B, C là ba điểm lấy lần-lượt trên Ox, Oy, Oz.*

1. Gọi H là hình chiếu của O xuống mặt phẳng ABC. Định rõ vị-trí của H ở trong tam-giác ABC.

2. Định tâm ω của hình cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.

5. Gọi O_1, O_2, O_3 là điểm đối-xứng của O qua các cạnh BC, CA, AB. Chứng tỏ rằng O_1, O_2, O_3 nằm trên hình cầu ω.

TOÁN

Cho một đoạn OS = d. Coi một hình cầu tâm O, bán-kính x.

1. Phải chọn x thế nào để cho S có thể dùng được làm đỉnh một hình nón ngoại-tiếp với hình cầu ? Trong trường-hợp có hình nón đó, tính theo x và d diện-tích của vòng tròn (C) chung cho hình cầu và hình nón.

2. Chứng-minh rằng, khi x thay đổi thì vòng tròn (C) nằm trên một mặt cong cố-định. Mặt cong đó là mặt nào ?

3. Tính theo x và d diện-tích xung-quanh của hình nón ngoại-tiếp với hình cầu [hình nón đỉnh S, đáy (C)]. Tính x để cho diện-tích đó bằng diện-tích của hình cầu.

BÀI GIẢI

1. Cách chọn x.

Để cho S có thể dùng được làm đỉnh một hình nón ngoại-tiếp với hình cầu, ta phải có S ở ngoài hình cầu, nghĩa là OS $> x$ tức là $d > x$ hay

$$x < d$$

Hình nón ngoại-tiếp với hình cầu theo một vòng tròn (C). Tâm của (C) là H : H là hình chiếu của một điểm M lấy trên (C) xuống OS.

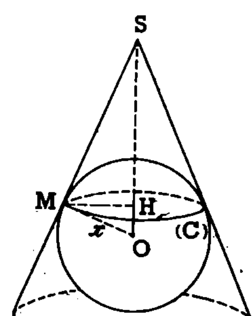
Bán-kính của (C).

Tam-giác vuông góc OMS cho ta :

$$OH \cdot OS = OM^2$$

Do đó
$$OH = \frac{OM^2}{OS} = \frac{x}{d}$$

Áp-dụng định-lý Pythagore vào tam-giác OMH, ta có :



Hình 153

$$HM^2 = OM^2 - OH^2$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{d^2} = \frac{x^2}{d^2}(d^2 - x^2)$$

Suy ra
$$HM = \frac{x\sqrt{d^2 - x^2}}{d}$$

Diện-tích của vòng (C) là :

$$\pi \, HM^2 = \frac{\pi \, x^2 \, (d^2 - x^2)}{d^2}$$

2 Vòng (C) ở trên một hình cầu cố-định.

Mỗi điểm M của vòng (C) nhìn đoạn cố-định OS dưới một góc vuông. Vì thế, vòng (C) nằm trên hình cầu cố-định mà đường kính là OS.

3. Diện-tích xung-quanh của hình nón.

Hình nón ngoại-tiếp với hình cầu là một hình nón tròn xoay mà đỉnh là S, trung-đoạn là SM, bán-kính đáy là HM.

Diện-tích xung-quanh của hình nón đó là $\mathcal{S} = \pi \, . \, HM \, . \, SM$.

Thế mà $\quad HM = \dfrac{x}{d} \sqrt{d^2 - x^2}$

$SM = \sqrt{d^2 - x^2}$ (tam-giác SMO)

cho nên $\quad \mathcal{S} = \pi \dfrac{x}{d} \sqrt{d^2 - x^2} \, . \, \sqrt{d^2 - x^2}$

$$\boxed{\mathcal{S} = \frac{\pi \, x \, (d^2 - x^2)}{d}}$$

Tính x để cho $\mathcal{S}$ bằng diện-tích của hình cầu.

Diện-tích của hình cầu là $4\pi x^2$.

Ta có phương-trình :

$$\frac{\pi \, x \, (d^2 - x^2)}{d} = 4\pi \, x^2$$

Gạt ra ngoài trị-số $x = 0$, ta còn có :

$$\frac{d^2 - x^2}{d} = 4x \quad \text{hay} \quad d^2 - x^2 = 4d^2$$

Suy ra $\quad x^2 + 4dx - d^2 = 0$

$$\Delta' = 4d^2 + d^2 = 5d^2 = (d\sqrt{5})^2$$

$$x = -2d \pm d\sqrt{5}$$

Trước tiên, ta coi nghiệm-số dương:

$$x = -2d + d\sqrt{5} = d(\sqrt{5} - 2)$$

Sau, ta xét xem trị-số đó có nhỏ hơn d không. Vì $\sqrt{5} - 2$ nhất định nhỏ hơn 1 nên ta có $x = d(\sqrt{5} - 2) < d$.

Vậy trị-số của x là $\mathbf{d(\sqrt{5} - 2)}$

- **Cách vẽ x.**

Ta có đoạn d.

Muốn vẽ $d\sqrt{5}$, ta vẽ cạnh huyền của một tam-giác vuông góc mà một cạnh là $2d$, một cạnh là d.

Được $d\sqrt{5}$ rồi, ta bớt đi $2d$ thì có x.

TOÁN

Gọi AA' là đường thẳng góc chung của hai đường thẳng trực-giao D, D'. Vẽ hình cầu đường kính AA'. Coi một đường thẳng Δ tiếp-xúc với hình cầu ở M và cắt hai đường D, D' lần-lượt ở P, P'.

1. **So-sánh PM với PA và so-sánh P'M với P'A'.**
2. **Tìm hệ-thức giữa AP = x, A'P = y và AA' = a.**
3. **Tìm khoảng cách từ M tới mặt DAA' và tới mặt D'AA'.**
4. **Quỹ-tích của M.**

BÀI GIẢI

1. So-sánh PM với PA.

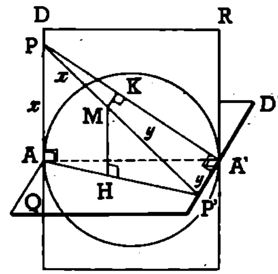
PA thẳng góc với bán-kính của hình cầu tại đầu của bán-kính đó. Vì thế, PA là một tiếp-tuyến.

PA và PM là hai tiếp-tuyến của hình cầu, phát-xuất từ P. Do đó, PA = PM.

Tương-tự P'A' = P'M.

2. Hệ-thức giữa x, y, a.

D thẳng góc với AA' và trực-giao với D', nên D thẳng góc với mặt D'AA' (mà ta sẽ gọi là Q). Ta suy ra rằng D thẳng góc với AP'.



Hình 154

D' thẳng góc với AA' và trực-giao với D, nên D' thẳng góc với mặt DAA' (mà ta sẽ gọi là R). Ta suy ra rằng D' thẳng góc với A'P.

Trong tam-giác vuông góc PAP', ta có :

$$P'P^2 = PA^2 + AA'^2$$

Trong tam-giác vuông góc AA'P', ta có :

$$AP'^2 = A'P'^2 + AA'^2$$

Vì thế $P'P^2 = PA^2 + A'P'^2 + AA'^2$ (1)

Nhưng $AA' = a$, $AP = x$, $A'P' = y$

$$PP' = PM + P'M' = PA + P'A' = x + y$$

(1) trở thành $(x + y)^2 = x^2 + y^2 + a^2$

Do đó $\mathbf{2xy = a^2}$

3. Khoảng cách từ M tới hai mặt phẳng Q, R.

Khi hạ MH thẳng góc với Q thì MH song-song với PA. Do đó H nằm trên AP'.

Khi hạ MK thẳng góc với R thì MK song-song với P'A', Do đó, K nằm trên A'P.

Hai tam-giác đồng-dạng P'MH, P'PA cho ta :

$$\frac{MH}{PA} = \frac{P'M}{P'P}$$

Suy ra $$MH = \frac{PA \cdot P'M}{P'P} = \frac{\mathbf{xy}}{\mathbf{x + y}}$$

Hai tam-giác đồng-dạng PMH, PP'A' cho ta :

$$\frac{MK}{P'A'} = \frac{Wd}{PP'}$$

Suy ra $$MK = \frac{P'A' \cdot PM}{PP'} = \frac{xy}{x + y}$$

Do đó $$MH = MK$$

4. Quỹ-tích của điểm M.

M cách đều hai mặt phẳng Q, R (hai mặt đó thẳng góc với nhau vì mặt nọ chứa một đường thẳng góc với mặt kia). Vì thế, M ở trên mặt phân-giác của những nhị-diện vuông góc định bởi hai mặt phẳng Q, R (có bốn mặt phân-giác, nhưng chúng làm thành hai mặt phẳng).

Hơn nữa M ở trên hình cầu đường kính AA'.

Quỹ-tích của M là hai vòng lớn, đó là vòng tương-giao của hình cầu với hai mặt phẳng nói trên.

BÀI TẬP ÔN

1. *Hai nửa đường thẳng Ax, Ay ở trên mặt phẳng Q cắt nhau thành 60^o.*

Trên đường thẳng góc với Q tại A, lấy AB = a. Từ B, vẽ Az song-song với Ay. Trên Ax, lấy AM = x. Trên Bz, lấy BP = 2x.

1. *Tính MP và thể-tích của khối ABMP theo a và x.*
2. *Tính x khi góc của MP với mặt Q là 60^o.*
3. *Tìm quỹ-tích của trung-điểm đoạn MP khi x thay đổi.*
4. *Chứng-minh rằng MP song-song với một mặt phẳng cố-định.*

2. *Cho một tam-giác DBC. Trên đường thẳng góc x'Dx với mặt DBC, ta lấy một điểm A. Kẻ hai đường cao DE, BF của DBC. Kẻ đường cao BK của ABC.*

1. *Chứng-tỏ — AE là một đường cao của ABC.*
   — BF trực-giao với AC.
   — AC thẳng góc với FK.

2. *Chứng-tỏ NH thẳng góc với mặt ABC (N là trực-tâm của DBC, H là trực-tâm của ABC).*

3. *Tính góc $\widehat{NHC}$, $\widehat{NKC}$. Sáu điểm N, H, E, C, K, F có ở trên một hình cầu không ?*

3. *Cho một nửa vòng tròn đường kính AB = 2R dựng trong mặt P. Đoạn SA = R thẳng góc với P. Lấy ba dây cung AD = DC = CB = R.*

1. *Tính giá-trị các góc $\widehat{SDB}$, $\widehat{SCB}$.*
2. *Tính thể-tích khối tháp SADCB.*
3. *Một mặt phẳng song-song với (SAB) cắt SD, SC, AD, CB ở MNPQ theo thứ-tự. Đặt AP = x, tính $y = MN^2 + MP^2 + NQ^2$ theo x. Biến-thiên của y theo x. Đường biểu-diễn.*

4. *Cho một góc tam-diện Oxyz, mỗi mặt bằng 60^o. Trên Ox, Oy, Oz, ta lấy lần-lượt OA = a, OB = b, OC = c.*

1. *Tính ba cạnh của tam-giác ABC theo a, b, c.*
2. *Tìm hệ-thức giữa a, b, c để cho $\widehat{BAC}$ là một góc vuông.*
3. *Cho biết đoạn a, tổng-số b + c = s và $\widehat{BAC} = 90^o$, hãy tính b và c. Biện-luận theo s. Chứng-tỏ rằng nếu ta tính được b và c thì hai số a và 2a lọt vào trong khoảng (b, c).*

5. *Cho một tam-diện đỉnh S, mỗi mặt bằng 60^o. Trên mỗi cạnh, theo thứ-tự, người ta lấy những đoạn $SA = l$, $SB = x$, $SC = y$.*

1. Tính cạnh BC (chung cho hai tam-giác ABC và SBC) theo x và y.

2. Thiết-lập hệ-thức giữa x và y để cho ABC là một tam-giác vuông góc tại A.

3. ABC là tam-giác vuông góc tại A, hãy tính x và y để cho $BC = 4l$.

Tính theo l tổng-số diện-tích của ba tam-giác SAB, SAC và SBC.

6. *Cho một tam-diện ba góc vuông OXYZ. Lấy ba điểm A, B, C trên OX, OY, OZ theo thứ-tự. Giả-sử $OB = 2OA$. Một đường thẳng lưu-động trong mặt phẳng XOY và song-song với AB, nó cắt OX ở M ; cắt OY ở N.*

1. Tính $OM = x$, $ON = y$, biết rằng $MN = l$ (l là một độ dài cho sẵn).

2. Chứng-tỏ rằng : tuy mặt phẳng CMN lưu-động, nhưng nó vẫn chứa một đường thẳng cố-định.

3. Tìm quỹ-tích của trung-điểm các cạnh, của trọng-tâm tam-giác CMN.

4. Chứng-tỏ rằng trung-tuyến phát-xuất từ M của tam-giác CMN trực-giao với phân-giác trong của góc XOY.

7. *Trong một mặt phẳng P, vẽ vòng O, đường kính $AB = 2R$. Một dây cung MN thẳng góc với AB tại H. Đặt $BAM = \alpha$. Kẻ Ax thẳng góc với P tại A ; trên đó ta lấy $AS = R$.*

1. Tính các cạnh, diện-tích mỗi mặt và thể-tích của hình tháp SAMN.

2. Muốn cho thể-tích hình tháp SMNB gấp ba thể-tích hình tháp SAMN thì α phải là bao nhiêu ?

3. Chiếu thẳng điểm B xuống mặt SMN thành I. Quỹ-tích của I khi α biến-thiên từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$.

8. *Cho một tam-giác cân ABC, $AB = AC = a\sqrt{5}$, $BC = 4a$. Trên nửa đường thẳng thẳng góc với mặt tam-giác tại A, ta lấy một điểm D định bởi $AD = h$.*

1. Tính h để cho tam-giác DBC là tam-giác vuông góc.

2. Từ đây về sau, ta lấy $h = a\sqrt{3}$. Tính số đo của nhị-diện (A, BC, D).

3. Tính diện-tích toàn-phần và thể-tích của khối tháp ABCD. Suy ra khoảng cách từ A tới mặt DBC.

4. Người ta cắt hình tháp bằng một mặt phẳng P thẳng góc với đường cao AH của tam-giác ABC. Thiết-diện là hình gì ? Gọi khoảng cách từ A tới P là x. Tính diện-tích của thiết-diện theo x và a. Tính x để cho diện-tích đó cực-đại.

9. Cho một hình tháp $ABCD$ trong đó $\widehat{ABC} = \widehat{DAB} = \widehat{DAC} = 90^o$, $AB = 12$, $BC = 9$, $AD = 16$. Một điềm M chạy trên đoạn AB. Đặt $AM = x$. Mặt phẳng thẳng góc với AB tại M cắt AC ở N; DC ở P; DB ở Q.

1. Chứng-tỏ rằng DBC là một góc vuông, BC trực-giao với AD, và $MNPQ$ là hình chữ-nhật.

2. Tính diện-tích S của chữ-nhật $MNPQ$. Biến-thiên của S. Đường biểu-diễn.

3. Tính x đề cho (dt : diện-tích) :

$$dt\ (AMN) + dt\ (DPQ) = dt\ (BMQ) + dt\ (CNP).$$

10. Cho một hình lăng-trụ đứng, chiều cao là h. Đáy là những tam-giác vuông góc và cân OAB, $O'A'B'$ ($OA = OB = a$). Các cạnh bên là AA' BB', OO'.

1. Tính thề-tích và diện-tích toàn-phần của khối đó theo a và h.

2. Chứng-tỏ rằng OI trực-giao với AB' (I là trung-điềm của AB).

3. Hạ OJ thẳng góc với AB'. Chứng-tỏ rằng mặt phẳng JOI thẳng góc với AB'. Chứng-tỏ rằng OIJ là một tam-giác vuông góc.

4. Tính cosin của góc phẳng của nhị-diện (B, AB', O). Tính số đo của nhị-diện khi $a = h$.

11. Cho một đoạn IJ, trung-điềm là H, $HI = HJ = a$. Trong mặt trung-trực P của đoạn IJ, ta lấy một điềm cố-định O và đặt $OH = 2l$.

1. Ox là một đường bất-kỳ, giả-sử rằng I và J chiếu thẳng xuống Ox thành hai điềm trùng nhau tại M. Chứng-tỏ rằng Ox trực-giao với IJ. Ox nằm trong mặt phẳng nào ?

2. Tìm quỹ-tích của M khi đường Ox thay đồi.

3. Coi tam-giác đều đỉnh O nội-tiếp trong vòng tròn đường kính OH, dựng trong P. Coi hình tháp đỉnh I, đáy là tam-giác đều nói trên. Tính các cạnh về thề-tích của hình tháp đó.

4. Định tâm và tính bán-kính hình cầu ngoại-tiếp với hình tháp nói trên.

12. Cho hai đường thẳng trực-giao D và Δ. Gọi đường thẳng góc chung là AB (A ở trên D ; B ở trên Δ). Trên D, có một điềm lưu-động M ; trên Δ, có một điềm lưu-động N.

1. Chứng-tỏ rằng bốn mặt của hình tứ-diện $ABMN$ là những tam-giác vuông góc.

2. Định tâm hình cầu đi qua bốn điềm A, B, M, N. Suy ra quỹ-tích của trung-điềm của đoạn MN khi M và N lưu-động.

3. Cho biết rằng $MC = 2l$ (hằng-số), tìm quỹ-tích của trung-điềm của đoạn MN.

4. Cho $AB = d$. $AM = BN = n$. Tính thề-tích của tứ-diện $ABMN$ theo d và n.

13. *Cho một tam-giác vuông góc AOB mà hai cạnh của góc vuông là $OA = 3$ và $OB = 4$. Trên đường thẳng góc với mặt AOB kẻ từ O, ta lấy $OC = 4$.*

1. *Chứng-tỏ rằng tứ-diện OABC có các cạnh đối trực-giao với nhau.*

2. *Tính thể-tích và diện-tích toàn-phần của hình tứ-diện đó.*

3. *Trên đoạn OC, ta lấy một điểm M và đặt $OM = x$. Mặt phẳng đi qua M và song-song với mặt AOB cắt hình tứ-diện theo hình tam-giác MNP. Khảo-sát sự biến-thiên của diện-tích tam-giác MNP khi x thay đổi. Đường biểu-diễn.*

14. *Cho một tam-giác đều ABC, cạnh là 1. Từ tâm O của vòng ngoại-tiếp của tam-giác đó, ta kẻ đường thẳng Δ thẳng góc với mặt phẳng ABC.*

1. *Trên Δ, ta lấy một điểm D. Hãy tính OD để cho $AD = 1$. Có nhận-xét gì về tứ-diện ABDC?*

Sau này, ta giả-sử $AD = 1$.

2. *Trên cạnh AB, ta lấy một điểm M; trên cạnh AC, ta lấy một điểm N. Đặt $AM = x$, $AN = y$. Mặt phẳng chứa MN và song-song với AD cắt CD và BD ở P, Q.*

a) Giả-sử $x = y = \frac{1}{2}$. Chứng-tỏ rằng MNPQ là một hình vuông.

b) Giả-sử $x < y$. Chứng-tỏ rằng MNPQ là một hình thang cân. Tính các cạnh và chiều cao của nó theo x và y.

Tính x và y để cho chiều cao đó bằng số trung-bình nhân của hai đáy và $y - x = \frac{1}{3}$.

15. *Trong một mặt phẳng P, cho một hình chữ-nhật ABCD. Ta lấy đoạn AS thẳng góc với mặt ABCD. Giả-sử $AS = AB = 4$, $AD = 3$.*

1. *Tính trị-số của các góc $\widehat{CDS}$, $\widehat{CBS}$.*

2. *Chứng-tỏ rằng năm điểm A, B, D, S, C ở trên một hình cầu.*

3. *Tính khoảng cách từ tâm hình cầu tới mặt P.*

4. *Gọi E là một điểm ở trên cạnh SA. Đặt $SE = x$. Mặt phẳng R đi qua E và song-song với P cắt SB, SC, SD ở E, G, H, theo thứ-tự. Định hình-tính của tứ-giác EFGH.*

5. *Coi hình hộp đứng mà đáy là EFGH, chiều cao là EA. Chứng-tỏ rằng diện-tích xung-quanh của nó là $y = 14x - \frac{7}{2}x^2$*

Tính x để cho $y = \frac{21}{2}$.

16. *Trong một mặt phẳng P, người ta cho một vòng tròn (C) đường kính $AB = 2R$. Vẽ đoạn AS thẳng góc với P. Trên (C), lấy một điểm M. Đặt $AS = h$, $PM = x$.*

1. *Tính thể-tích V của hình tháp SAMB theo R, h, x.*

2. *Chứng-minh rằng hai mặt phẳng SAM, SMB thẳng góc với nhau.*

3. *Qua A, người ta vẽ mặt phẳng Q thẳng góc với SM. Q cắt SM, SB ở M', B' theo thứ-tự. Chứng-tỏ rằng MB và M'B' song-song với nhau.*

17. *Cho một đoạn $AB = a$ dựng trong mặt phẳng P. Ta vẽ đường thẳng x'Ax nằm trong P và thẳng góc với AB ; và vẽ đường thẳng y'By thẳng góc với P. Một điểm M lưu-động trên x'x. Một điểm N lưu-động trên y'y.*

1. *Chứng-tỏ rằng bốn mặt của tứ-diện ABMN là những tam-giác vuông góc và hình cầu đường kính MN đi qua hai điểm cố-định.*

2. *Cho $MN = a\sqrt{2}$.*

a) *Tìm hệ-thức giữa hai đoạn AM, BN.*

b) *Chứng-tỏ rằng tổng-số bình-phương các cạnh của tứ-diện ABMN là hằng-số.*

c) *Tìm quỹ-tích của đỉnh thứ tư của hình bình-hành mà hai cạnh là MN, MA.*

d) *Chứng-tỏ rằng góc của hai đường MN, AB không thay đổi.*

18. *Cho hai mặt phẳng song-song P và P', khoảng cách là 3 cm. Trong P, có một tam-giác vuông cân AOB, cạnh huyền là $AB = 4$ cm. Chiếu thẳng ba điểm A, O, B xuống P' thành A', O', B'.*

1. *M là một điểm bất-kỳ trên O'B'. Chứng-tỏ rằng thể-tích V của hình tháp MAOB không phụ-thuộc vào vị-trí của M ở trên O'B'. Tính V.*

2. *Chứng-tỏ rằng $\widehat{AOM}$ là một góc vuông.*

3. *Chứng-tỏ rằng có một hình cầu đi qua sáu điểm A, O, B, A', O', B'.*

Định tâm I và tính bán-kính R của hình cầu đó.

4. *Mặt phẳng AA'OO' cắt hình cầu nói trên theo một vòng (C), tâm C, bán-kính r. Tính r và đoạn IC.*

19. *Cho một hình vuông ABCD cạnh là $AB = 2l$. Vẽ hình tròn tâm O nội-tiếp trong hình vuông đó. Nối B và C với trung-điểm S của AD. Cho hình vẽ quay quanh trục SO. SO cắt BC ở S'.*

1. *Định hình-tính của những cố thể C_1, C_2, C_3, gây bởi hình vuông, hình tròn và tam-giác SBC theo thứ-tự.*

2. *Gọi P là một mặt phẳng thẳng góc với đoạn SS' tại một điểm I (đặt $SI = x$). P cắt C_1, C_2, C_3 theo ba hình mà ta gọi diện-tích là a, y, z theo thứ-tự. Tính a, y, z theo l và x.*

3. *Tính x để cho y = z.*

4. *Biến-thiên của y khi x biến-thiên từ O đến 2l. Đường biểu-diễn.*

20. *Cho một hình tứ-diện đều ABCD, cạnh bằng a.*

1. *Tính chiều cao, diện-tích toàn-phần và thể-tích của hình đó.*

2. *Chứng-tỏ rằng ta có thể cắt tứ-diện bằng một mặt phẳng chứa CD và thẳng góc với AB tại một điểm I. Tính các cạnh, diện-tích của tam-giác ICD. Tính cosin của nửa góc phẳng của nhị-diện AB.*

3. *Trên đoạn AB, ta lấy điểm M và đặt AM = x. Tính các cạnh và diện-tích S của tam-giác MCD.*

4. *Khảo-sát sự biến-thiên và vẽ đường biểu-diễn của hàm-số $y = S^2$.*

21. *Trong một mặt phẳng P, cho một hình vuông ABCD, cạnh a, tâm O. Trên đường thẳng góc với mặt P ở D, ta lấy điểm S sao cho SD = a. Coi khối tứ-diện SABC.*

1. *Chứng-tỏ rằng ba trong số bốn mặt bên của khối đó là những tam-giác vuông góc. Nói rõ hình-tính của mặt thứ tư.*

Chứng-tỏ rằng AB và BS trực-giao với nhau.

2. *Tính diện-tích toàn-phần và thể-tích của khối tứ-diện SABC.*

3. *Qua AC, vẽ mặt phẳng thẳng góc với BS. Mặt đó cắt BS ở I. Định rõ vị-trí của I ở trên BS. Tính IC và IO. Tính số đo của nhị-diện cạnh BS.*

Mặt phẳng AIC cắt khối tứ-diện SABC thành hai khối tứ-diện nhỏ. Tính thể-tích của mỗi khối nhỏ đó.

22. *Cho một hình-tháp SABCD. Đáy là một hình chữ-nhật ABCD, AB = a, BC = b. Chân H của đường cao SH là trung-điểm của cạnh CD. Cho SH = 2b. Qua AB, có một mặt phẳng lưu-động, mặt đó tạo với đáy một góc x và cắt SC, SD ở P, Q. Qua PQ, vẽ một mặt phẳng song-song với đáy, cắt SA, SB ở M, N.*

1. *Tính góc của mặt SAB và mặt đáy, sai kém 1^o.*

2. *MNPQ là hình gì ? Tính chu-vi 2p của MNPQ theo x. Tính x để cho 2p = a + b.*

3. *Tính diện-tích S_1 của MNPQ theo x. Tính x để cho $S_1 = \frac{ab}{4}$.*

4. *Tính diện-tích S_2 của ABPQ theo x. Tính S_2 khi $x = 30^o$ và khi $x = 45^o$.*

23. *Cho một nửa vòng-tròn giới-hạn bởi đường kính AB = 2R. Vẽ hai tiếp-tuyến AC, BD. Một tiếp-tuyến thứ ba CD tạo bởi AB một góc bằng α.*

1. Chứng-minh rằng $AC + DB = DC$ và $CA \cdot BD = R^2$. Tính AC và BD theo R và α. Biểu-thị AC và BD theo $tg\frac{\alpha}{2}$.

2. Cho hình vẽ quay quanh trục AB, ABDC tạo nên một hình nón cụt. Tính thể-tích V của hình đó theo $t = tg\ \alpha$. Khảo-sát sự biến-thiên của V khi α thay đổi $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$. Định α để cho $V = 10\,\pi\,R^3$.

3. Gọi S' là diện-tích xung-quanh và S là diện-tích toàn-phần của hình nón cụt nói trên. Tính tỉ-số $y = \frac{S'}{S}$ theo $m = \cos 2\alpha$. Biến-thiên của y khi α thay đổi $(0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$. Tính α để cho $y = \frac{8}{13}$.

24. Cho một nửa vòng đường kính $AB = 2R$. Trên đường kính đó kéo dài về phía B, lấy một điểm S rồi kẻ ST, tiếp-xúc với nửa vòng tại T. Đặt $\widehat{BST} = x$.

1. Cho đoạn ST và cung TA quay tròn quanh AB. Tính tổng-số những diện-tích sinh ra theo R và x.

2. Định x để tổng-số nói trên bằng $m\pi R^2$ (m là một số dương cho sẵn). Biện-luận theo m.

Áp-dụng bằng số : $m = \frac{9}{2}$.

3. Hạ TH thẳng góc với AB. Tính tỉ-số $y = \frac{AH}{AS}$ theo x. Biểu-thị y theo $\sin x = u$.

Coi y là một hàm-số của u và cho x biến-thiên từ 0 đến $\frac{\pi}{2}$. Biến-thiên của y. Đường biểu-diễn.

25. Cho tam-giác vuông góc ABC, $AB = c$, $BC = a$ (cạnh huyền), $CA = b$. Khi quay quanh CA, nó tạo nên một hình nón.

1. Tìm tâm I và tính bán-kính r của hình cầu nội-tiếp trong hình nón, và tiếp-xúc với đáy của hình nón.

2. Vòng tiếp-xúc của hình cầu và hình nón chia hình cầu làm hai cầu-đới. Tính tỉ-số diện-tích hai cầu-đới đó theo a và c, rồi theo $tg\frac{B}{2}$ $(\widehat{ABC} = B)$.

3. Gọi P là một mặt đi qua BC. Hình nón bị P cắt theo một tam-giác BCB'. Đặt $BB' = 2x$ $(0 < x < c)$ và $\widehat{BCB'} = 2u$. Giữa u và x có liên-quan gì không ? Hình cầu bị P cắt theo một vòng tròn tâm I', bán-kính r. Tính r theo x hay theo u (coi a, b, c như là số biết sẵn rồi). Tính theo x hay theo tg u tỉ-số diện-tích vòng I' và tam-giác BCB'. Áp-dụng $b = 12$, $c = 5$, $x = 3{,}64cm$.

BÀI TOÁN ÔN

Cho một vòng tròn O, đường kính $AB = 2R$. Gọi AC là một dây cung, AC nghiêng với AB một góc bằng 30^o. Tiếp-tuyến của vòng tròn kẻ từ C cắt đường AB kéo dài tại D. Cho hình vẽ quay tròn xung-quanh AB, vòng tròn sinh ra một hình cầu và tam-giác ACD sinh ra một cố-thể (S).

1. Tính diện-tích của (S) theo R.

2. Trên đoạn AB, ta lấy một điểm M.

Mặt phẳng thẳng góc với AB tại M cắt hình cầu và (S) theo hai vòng tròn (C_1) và (C_2) theo thứ-tự. Đặt $AM = Rx$. Tính theo R và x hiệu-số y của diện-tích hai vòng tròn nói trên. Người ta không-xét y âm.

3. Vẽ đường biểu-diễn sự biến-thiên của y theo x. Tính cực-đại của y khi M lưu-động từ A đến B.

4. Định x để cho $y = \pi m^2$. Biện-luận theo m (m là một đoạn cho). Trường-hợp $m^2 = \frac{R^2}{2}$.

BÀI GIẢI

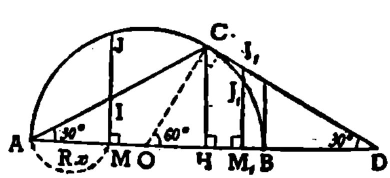
1. Diện-tích của cố-thể (S).

AC là cạnh của tam-giác đều nội-tiếp trong vòng O. Khi hạ CH thẳng góc với AB thì $OH = \frac{R}{2} = HB$ và $CH = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. $AH = \frac{3R}{2}$

Vì $\widehat{BAC} = 30^o$ ta suy ra $\widehat{BOC} = 60^o$.

Vì $\widehat{OCD} = 90^o$ cho nên $\widehat{ODC} = 30^o$.

Như thế, ACD là tam-giác cân, trục đối-xứng là CH.



Hình 155

Khi tam-giác ACD quay quanh trục AB, nó sinh ra một cố-thể (S) gồm có hai hình nón tròn xoay, đỉnh là A và D, bán-kính của đáy chung là CH, trung-đoạn của một hình bằng CA. Diện-tích Σ của (S) bằng hai lần diện-tích xung-quanh của hình nón tròn xoay nói trên:

$$\Sigma = 2\pi \, . \, CH \, . \, AC = 2\pi \frac{R\sqrt{3}}{2} . \, R\sqrt{3} = 3\pi R^2$$

2. Hiệu-số y của diện-tích hai vòng tròn (C_1) và (C_2).

● *M ở trên đoạn AH.*

$$\left(0 \leqq AM \leqq AH \quad \text{tức} \quad 0 \leqq Rx \leqq \frac{3R}{2} \quad \text{hay} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{3}{2}\right)$$

Đường thẳng góc với AB kẻ từ M cắt AC tại I, và cắt nửa vòng tròn tại J. Bán-kính của hai vòng (C_1), (C_2) là MJ, MI.

Diện-tích của vòng (C_1) là :

$$\mathcal{S}_1 = \pi\, MJ^2 = \pi MA\,.\,MB = \pi Rx\,(2R - Rx)$$

$$\mathcal{S}_1 = \pi\, R^2x\,(2 - x)$$

Diện-tích của vòng (C_2) là :

$$\mathcal{S}_2 = \pi\, MI^2 = \pi\,(AM \text{ tg } 30^o)^2 = \pi\left(Rx\, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\mathcal{S}^2 = \frac{\pi\, R^2x^2}{3}$$

Trong trường-hợp này $\mathcal{S}_1 > \mathcal{S}_2$.

Ta suy ra $y = \mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2 = \pi\, R^2x\,(2 - x) - \dfrac{\pi\, R^2x^2}{3}$

$$y = \frac{2\pi R^2x\,(3 - 2x)}{3}$$

● *M ở trên đoạn HB.*

$$\left(\frac{3R}{2} \leqq AM \leqq AB \quad \text{tức} \quad \frac{3R}{2} \leqq Rx \leqq 2R \quad \text{hay} \quad \frac{3}{2} \leqq x \leqq 2\right)$$

Gọi M_1 là vị-trí của M trong trường-hợp này. Đường thẳng của với AB kẻ từ M_1 cắt CD ở I_1, và cắt nửa vòng ở J_1. Bán-kính của hai vòng (C_1) và (C_2) là M_1J_1 và M_1I_1.

Diện-tích của vòng (C_1) vẫn là :

$$\mathcal{S}_1 = \pi\, R^2\, x\,(2 - x)$$

Diện-tích của vòng (C_2) là:

$$\mathcal{S}_2 = \pi\,(M_1I_1)^2 = \pi\,(DM_1 \text{ tg } 30^o)^2$$

$$\mathcal{S}_2 = \pi\,\overline{DM_1}^2 . \frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}\,(3R - Rx)^2$$

$$\mathcal{S}_2 = \frac{\pi R^2}{3}\,(3 - x)^2$$

Trong trường-hợp này $\mathcal{S}_2 > \mathcal{S}_1$.

Ta suy ra:

$$y = \mathcal{S}_2 - \mathcal{S}_1 = \frac{\pi R^2}{3}\,(3 - x)^2 - \pi R^2 x\,(2 - x)$$

$$y = \frac{\pi R^2\,(2x - 3)^2}{3}$$

3. Đường biểu-diễn của hàm-số y.

$$0 \leq x \leq \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{2\pi R^2 x\,(3 - 2x)}{3}$$

$$y' = \frac{2\pi R^2}{3}\,(3 - 4x)$$

Hàm-số y triệt-tiêu khi $x = 0$ và khi $x = \frac{3}{2}$; y qua một cực-đại khi $x = \frac{3}{4}$. Lúc đó $y = \frac{3\pi R^2}{4}$

Đường biểu-diễn là cung parabol P_1.

$$\frac{3}{2} \leq x \leq 2$$

$$y = \frac{\pi R^2\,(2x - 3)^2}{3}$$

$$y' = \frac{2\pi R^2}{3}\,(2x - 3)$$

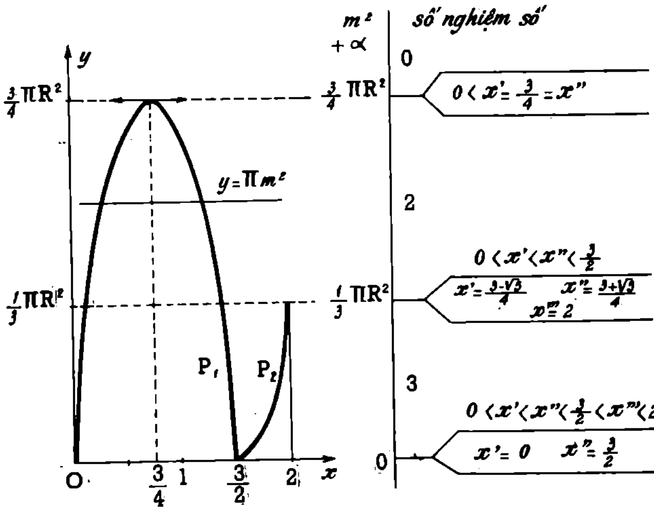
Hàm-số triệt-tiêu khi $x = \frac{3}{2}$ bằng $\frac{\pi R^2}{3}$ khi $x = 2$; y qua một cực-tiểu khi $x = \frac{3}{2}$. *Đường biểu-diễn* là cung parabol P_2.

Khi M lưu-động từ A đến B, nghĩa là khi x biến-thiên từ 0 đến 2 thì y qua một cực-đại mà trị-số là $\frac{3\pi R^2}{4}$ khi $x = \frac{3}{4}$.

4. Cách định x để cho $y = \pi m^2$.

Ta cắt đường biểu-diễn bằng đường thẳng nằm ngang mà phương-trình là $y = \pi m^2$. Hoành-độ giao-điểm, nếu có, là trị-số của x mà ta phải tìm.

Nhờ đồ-thị, ta được các thành-tích mà ta ghi ngay ở bên cạnh hình vẽ.



Hình 156

Khi $y = \pi m^2 = \frac{1}{3}\pi R^2$ thì ta thấy đường thẳng cắt đường biểu-diễn tại ba điểm, hoành-độ của điểm thứ ba là $x''' = 2$. Để tính hai hoành-độ kia, ta giải phương-trình :

$$\frac{2\pi R^2}{3} x(3 - 2x) = \frac{\pi R^2}{3}$$

$$4x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$x' = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}, \quad x'' = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$$

TOÁN

Cho một góc tam-diện Oxyz, mỗi mặt là 60°. Trên Ox, Oy, Oz, ta lấy điểm A, B, C theo thứ-tự, và đặt OA = a, OB = b, OC = c.

1. Tính ba cạnh của tam-giác ABC.

2. Tìm hệ-thức giữa a, b, c để cho tam-giác ABC vuông góc ở A.

3. Cho biết a và tổng-số b + c = s, hãy tính b và c, biện-luận theo s. So-sánh b và c với a và 2a.

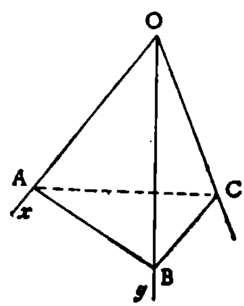
4. Giả-sử OA = OB = OC = a. Tính khoảng cách từ O tới mặt ABC thể-tích của khối OABC và tính bán-kính của hình cầu đi qua bốn điểm O, A, B, C.

BÀI GIẢI

1. Các cạnh của tam-giác ABC.

Trong tam-giác AOB, ta biết hai cạnh OA = a, BO = b và góc kề $\widehat{AOB} = 60°$.

Ta suy ra :



Hình 157

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos 60°$$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - ab \quad (\cos 60° = \frac{1}{2})$$

$$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - ab}$$

Tương-tự, ta được :

$$BC = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$$

$$CA = \sqrt{c^2 + a^2 - ca}$$

2. Hệ-thức giữa a, b, c khi $\widehat{BAC} = 90°$.

Điều-kiện ắt có và đủ để cho tam-giác BAC vuông góc ở A là :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

tức $\quad b^2 + c^2 - bc = a^2 + b^2 - ab + a^2 + c^2 - ca$

hay $\quad 2a^2 - a(b + c) + bc = 0.$

Cách tính b và c.

Ta đã biết $\qquad b + c = s$

Hệ-thức ở trên cho ta :

$$bc = a\,(b + c) - 2a^2 = as - 2a^2 = a\,(s - 2a)$$

Vì b và c là số đo của hai đoạn, nên $b\,.\,c > 0$, ta phải đặt ngay điều-kiện $s > 2a$.

Bài toán rút lại là tìm hai số b và c biết tổng-số $b + c = s$ và tích-số $bc = a\,(s - 2a)$.

b và c là những nghiệm-số, nếu có, của phương-trình sau này :

$$f(x) = x^2 - sx + a\,(s - 2a) = 0 \qquad (1)$$

Việc biện-luận gồm có : việc xét sự khả hữu nghiệm-số và việc lấy những nghiệm-số dương (b và c dương).

Ta có $\qquad \Delta = s^2 - 4a\,(s - 2a) = s^2 - 4as + 8a^2$

$$\Delta = (s^2 - 4a^2 + 4a^2) + 4a^2 = (s - 2a)^2 + 4a^2$$

Với dạng-thức đó của Δ, ta biết ngay $\Delta > 0$, vậy phương-trình (1) có hai nghiệm-số x', x''. Với $s > 2a$ thì (1) có hai biến-dấu, hai nghiệm-số cùng dương cả.

Việc so-sánh a và 2a với x', x''.

Ta có $\qquad f\,(a) = a^2 - as + as - 2d^2 = -\,a^2 < 0$

Vậy $\qquad x' < a < x''$

Ta lại có :

$$f\,(2a) = 4a^2 - 2as + as - 2a^2$$

$$= 2a^2 - as = a\,(2a - s)$$

Vì $s > 2a$ nên $f\,(2a) < 0$, do đó :

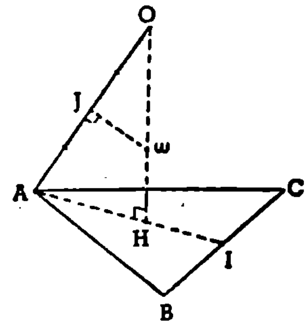
$$x' < 2a < x''$$

Tóm lại $\qquad x' < a < 2a < x''$

Ta suy ra hoặc là $b < a < 2a < c$

hoặc là $c < a < 2a < c$

4. Tứ-diện đều OABC.



Hình 158

Khi $OA = OB = OC = a$, ba tam-giác OAB, OBC, OCA là ba tam-giác đều, cạnh là a. Tam-giác ABC cũng là tam-giác đều, cạnh là a.

Như vậy, khối OABC là một tứ-diện đều.

O cách đều ba điểm A, B, C nên O nằm trên trục HO của vòng ngoại-tiếp của tam-giác đều ABC. H chính là trọng-tâm và trực-tâm của ABC. Ta có :

$$AB = a, \quad AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad AH = \frac{2}{3} AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Tam-giác vuông góc AOH cho ta:

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = a^2 - \frac{3a^2}{9} = \frac{6a^2}{9}$$

$$\mathbf{OH = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

Đó là khoảng cách từ O đến mặt ABC.

Thể-tích của hình tháp OABC là:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{B}h = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

Gọi ω là tâm của hình cầu đi qua bốn điểm O, A, B, C. ω cách đều A,B,C nên O nằm trên trục OH của vòng ABC. ω cách đều A, O nên ω nằm trên đường trung-trực của đoạn OA, vẽ trong mặt phẳng AOH. Đường này cắt OH tại ω. Dùng hai tam-giác đồng-dạng OJω và OHA, ta có :

$$\frac{OJ}{OH} = \frac{O\omega}{OA}$$

Do đó : $$O\omega = \frac{OJ \cdot OA}{OH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

$$O\omega = \frac{3a}{2\sqrt{6}} = \frac{3a\sqrt{6}}{12} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Chú-ý. So-sánh $OH = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ và $O\omega = \frac{a\sqrt{6}}{4}$ ta thấy :

$$\frac{O\omega}{OH} = \frac{3}{4}$$

TOÁN

Coi hai mặt phẳng song-song P và Q. Một đường thẳng L thẳng góc với P tại H ; với Q tại K. Trong P, ta vẽ một đường thẳng X đi qua H. Trong Q, ta vẽ một đường thẳng Y đi qua K ; Y không song-song với X.

Trên X, ta lấy hai điểm A, B, HA = HB = a.

Trên Y, ta lấy hai điểm C, D, KC = KD = b.

Gọi O là một điểm trên L, ta định chiều cho L từ H đến K, Đặt $\overline{HK} = h > 0$ và $\overline{HO} = x$.

1. Tính OA, OB, OC, OD theo a, b, h, x.

2. Định x để cho O là tâm của hình cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D. Tâm đó có thể là H, là K, hay là trung-điểm của HK không ?

3. Giả sử a = b và X, Y trực-giao với nhau. So-sánh bốn mặt của khối tứ-diện ABCD. Tính diện-tích xung quanh và thể-tích của khối đó theo a và h.

BÀI GIẢI

1. Trị-số của OA, OB, OC, OD.

Điểm O nằm trên trung-trực L của đoạn AB nên OA = OB.

Tam-giác vuông góc AHO cho ta :

$OA^2 = HA^2 + OH^2 = a^2 + x^2$

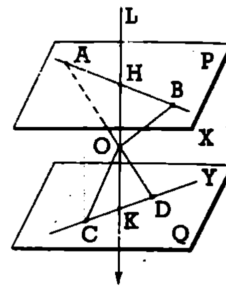
$$OA = OB = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Tương-tự, tam-giác vuông góc OKD cho ta :

$OD^2 = OK^2 + KD^2 = (h - x)^2 + b^2$

$(\overline{OK} = \overline{HK} - \overline{HO} = h - x)$

$$OD = OC = \sqrt{(h - x)^2 + b^2}$$



Hình 159

2. Tâm hình cầu qua A, B, C, D.

Ta đã có OA = OB, OC = OD.

Điều-kiện ắt có và đủ **để cho O là tâm của hình cầu đi qua A, B, C, D là OA = OC tức là $OA^2 = OC^2$.**

hay $\quad x^2 + a^2 = (h - x)^2 + b^2$

Suy ra: $$x = \frac{h^2 + b^2 - a^2}{2h}$$

Nếu O trùng với H thì $\overline{HO} = x = 0$ và *đảo lại*, lúc đó :

$$h^2 + b^2 - a^2 = 0$$

hay là $\quad h^2 = a^2 - b^2$

Trong trường-hợp đó, ta phải có $b < a$.

— Nếu O trùng với K thì $\overline{HO} = \overline{HK}$ tức là $x = h$ và *đảo lại*, nghĩa là :

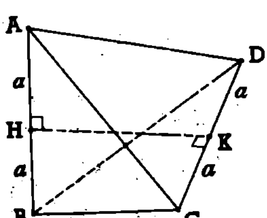
$$\frac{h^2 + b^2 - a^2}{2h} = h$$

Suy ra $h^2 = b^2 - a^2$

Trong trường-hợp này, ta phải có $a < b$.

Nếu O là trung-điểm của KH thì $\overline{HO} = \frac{h}{2}$ tức là $x = \frac{h}{2}$ hay

$$\frac{h^2 + b^2 - a^2}{2h} = \frac{h}{2}$$



Hình 160

Suy ra $\quad \mathbf{h}^2 + \mathbf{b}^2 - \mathbf{a}^2 = \mathbf{h}^2$

Muốn thế, ta phải lấy $a = b$.

3. Khảo-sát các mặt của tứ-diện ABCD.

Khi $a = b$ thì HA = HB = KC = KD, HK là trục đối-xứng của tứ-diện ABCD. Ta suy ra CA = BD, DA = CB.

AB thẳng góc với KH và trực-giao với CD nên AB thẳng góc với mặt HCD. Mặt HCD là mặt trung-trực của đoạn AB. Nó là một mặt đối-xứng của tứ-diện ABCD. Ta suy ra CA = CB và DA = DB.

Tóm lại, ta có CA = CB = DA = DB.

Như vậy, bốn mặt của khối ABCD là những tam-giác cân :

CAB (đỉnh C), DAB (đỉnh D), ACD (đỉnh A), BCD (đỉnh B).

Hơn nữa, AB = CD theo giả-thiết, nên ta nói thêm được rằng bốn tam-giác cân nói trên bằng nhau cả.

Diện-tích của khối ABCD.

Vì bốn mặt bằng nhau nên ta tính diện-tích một mặt, thí-dụ như ADC. Đáy của ACD là CD = $2a$. Chiều cao là AK. Dùng tam-giác vuông góc AKH thì có :

$$AK^2 = AH^2 + HK^2 = h^2 + a^2$$

$$AK = \sqrt{h^2 + a^2}$$

Vậy $\quad dt\,(ACD) = \frac{1}{2}\,CD\,.\,AK = a\sqrt{h^2 + a^2}$

Diện-tích toàn-phần $\mathcal{S}$ của khối ABCD là :

$$\mathcal{S} = 4\mathbf{a}\sqrt{\mathbf{h}^2 + \mathbf{a}^2}$$

Thể-tích của khối ABCD.

Ta tính thể-tích của khối AHCD rồi nhân đôi, sẽ được thể-tích $\mathcal{V}$ của khối ABCD.

Khối tháp AHCD có chiều cao là AH = a và đáy là HCD.

$$\mathcal{V}\ (AHCD) = \frac{1}{3}\ AH\ .\ dt\ (HCD)$$
$$= \frac{1}{3}\ a\ .\left(\frac{1}{2}\ HK\ .\ CD\right)$$
$$= \frac{1}{6}\ a\ .\ h\ .\ 2a = \frac{a^2h}{3}$$

Do đó $$\mathcal{V}\ (ABCD) = \frac{2a^2h}{3}.$$

TOÁN

Cho một nửa vòng tròn đường kính AOB = 2R. Kẻ ba dây cung liên-tiếp AD, DC, CB, mỗi cung bằng 60°. Kẻ đoạn AS = R thẳng góc với mặt phẳng π của vòng tròn.

1. Tính số đo các góc $\widehat{SDB}$. $\widehat{SCB}$.

2. Định tâm và bán-kính của hình cầu đi qua 5 điểm S,A,D,C,B.

3. Định rõ thiết-diện của hình cầu nói trên bởi mặt phẳng SAD.

4. Một mặt phẳng song-song với mặt SAB cắt hình tháp SADCB theo hình MNPQ (M, N, P, Q ở trên AD, SD, SC, CB theo thứ-tự). Tính $y = MN^2 + NP^2 + PQ^2$ theo AM = x. Biến-thiên của y khi $0 \leq x \leq R$ (không cần vẽ đường biểu-diễn).

BÀI GIẢI

1. Số đo của hai góc $\widehat{SDB}$, $\widehat{SCB}$.

SA thẳng góc với mặt π, theo giả-thiết, nên SA thẳng góc với AB, AD, và SA trực-giao với DB, CB.

Hai góc $\widehat{ADB}$, $\widehat{ACB}$ nội-tiếp trong nửa vòng đường kính AB, nên $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 90°$.

DB thẳng góc với AD, trực-giao với SA, nên DB thẳng góc với SD cạnh thứ ba của tam-giác SAD.

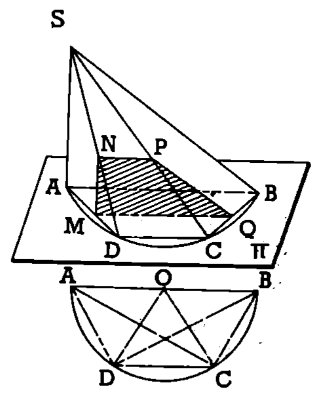
Như thế thì $\widehat{SDB} = 90^o$.

Tương-tự, ta có $\widehat{SCB} = 90^o$.

2. Hình cầu qua năm điểm S, A, D, C, B.

Năm điểm nói trên không cùng ở trong một mặt phẳng.

Ba điểm A, D, C cùng nhìn đoạn SB dưới một góc vuông ($\widehat{SAB} = \widehat{SDB} = \widehat{SCD} = 90^o$) nên ba điểm đó cùng ở trên hình cầu (Σ) mà đường kính là SB, tâm là trung-điểm của SB.



Hình 161

Tam-giác vuông góc SAB cho ta :

$$SB^2 = SA^2 + AB^2 = R^2 + 4R^2 = 5R^2$$

$$SB = R\sqrt{5}$$

Bán-kính của hình cầu (Σ) là $\dfrac{R\sqrt{5}}{2}$.

Ta nên nhận-xét rằng vòng O và điểm S (ở ngoài mặt π của vòng O) *đủ* định rõ hình cầu.

3. Thiết-diện của hình cầu.

Mặt phẳng SAD có ba điểm S, A, D ở trên hình cầu (Σ), vậy nó cắt hình cầu đó theo vòng tròn qua ba điểm S, A, D. Thế mà tam-giác SAD là tam-giác vuông cân, đỉnh là A. Vì thế, vòng tròn SAD có đường kính là $SD = SA\sqrt{2} = R\sqrt{2}$.

4. Thiết-diện MNPQ.

Gọi (T) là một mặt phẳng song-song với mặt SAB. (T) cắt hình tháp SADCB theo hình tứ-giác MNPQ. Ta biết rằng nếu một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song-song thì hai giao-tuyến song-song với nhau.

Vì thế : MN song-song với AS.

PQ song-song với SB.

MQ song-song với AB.

Đường DC song-song với AB, nên song-song với mặt SAB và mặt (T). Mặt SDC chứa DC và cắt (T) theo đường NP cho nên NP song-song với DC (và MQ). Tam-giác DMN đồng-dạng với tam-giác DAS. Thế mà DAS là tam-giác vuông cân (đỉnh A), nên DMN cũng là tam-giác vuông cân (đỉnh M).

Ta suy ra $\quad MN = MD = AD - AM = R - x$

Hai tam-giác đồng-dạng SNP, SDC cho ta :

$$\frac{NP}{DC} = \frac{SN}{SD}\left(= \frac{AM}{AD} = \frac{x}{R}\right)$$

Do đó $\quad NP = DC\,\frac{x}{R} = R\,\frac{x}{R} = x$

Hai tam-giác đồng-dạng CPQ, CSB cho ta :

$$\frac{PQ}{SB} = \frac{CQ}{CB}\left(= \frac{DM}{DA} = \frac{R-x}{R}\right)$$

Do đó $\quad PQ = SB\,\frac{R-x}{R} = R\sqrt{5}\,\frac{R-x}{R} = (R-x)\sqrt{5}$

Vậy
$$\begin{aligned} y &= MN^2 + NP^2 + PQ^2 \\ &= (R-x)^2 + x^2 + 5\,(R-x)^2 \\ &= 6\,(R-x)^2 + x^2 \\ y &= 7x^2 - 12Rx + 6R^2 \end{aligned}$$

y là một hàm-số bậc hai của x. Ở đây ta chỉ cho x biến-thiên từ 0 đến R.

Đạo-hàm là :

$$y' = 14x - 12R = 14\left(x - \frac{6R}{7}\right)$$

y' triệt-tiêu khi $x = \frac{6R}{7}$. Lúc đó $\quad y = \frac{6R^2}{7}$

Bảng biến-thiên :

x	0		$\frac{6R}{7}$		R
y'		$-$	0	$-$	
y	$6R^2$	$\searrow$	$\frac{6R^2}{7}$	$\nearrow$	R^2

Khi x biến-thiên từ 0 đến $\frac{6R}{7}$, thì y nghịch-biến từ $6R^2$ đến $\frac{6R^2}{7}$.

Khi $x = \frac{6R}{7}$, y qua một cực-tiểu mà trị-số là $\frac{6R^2}{7}$.

Khi x biến-thiến từ $\frac{6R}{7}$ đến R thì y đồng-biến từ $\frac{6R^2}{7}$ đến R^2.

(Nếu phải vẽ đường biểu-diễn thì ta có một cung parabol).

TOÁN

Cho một hình tháp SAMB, SA thẳng góc với đáy AMB. Tam-giác AMB vuông góc tại M. Hạ AH thẳng góc với SM ; và AK thẳng góc với SB.

1. Tính số đo của nhị-diện (A, SM, B).

2. Tìm một góc phẳng của nhị-diện (M, SB, A).

3. Chứng-tỏ rằng năm điểm A, M, B, H, K ở trên một hình cầu.

4. Tìm vòng tương-giao của hai hình cầu đường kính SA và đường kính AB.

5. Đặt $\widehat{BAM} = a$, $\widehat{AKH} = b$.

Chứng-tỏ rằng $tga \cdot tgb = \frac{SB}{SA}$. Giả-sử trong hình tháp SAMB, A, B, S cố-định, M lưu-động trong mặt P thẳng góc với SA tại A và $\widehat{AMB} = 90^o$. Đặt $\frac{SB}{SA} = k$; tính a để cho $a = b$ hoặc để cho $a = 2b$.

BÀI GIẢI

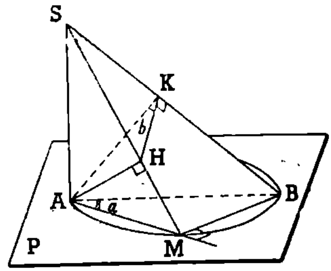
1. *Số đo của nhị-diện (A, SM, B).*

SA thẳng góc với mặt ABM nên SA trực-giao với MB.

MB thẳng góc với AM (theo giả-thiết) và trực-giao với SA, nên MB thẳng góc với mặt phẳng SAM.

Thế mà mặt SMB chứa MB, nên mặt SMB thẳng góc với mặt SAM (mặt thứ nhất chứa đường MB thẳng góc với mặt thứ nhì).

Nói khác đi, nhị-diện (A, SM, B) là nhị-diện vuông góc.



Hình 162

Từ điểm A, nếu ta hạ AH thẳng góc với SM thì AH thẳng góc với mặt SMB. Do đó, AH thẳng góc với HB, HK và trực-giao với SB.

2. Góc phẳng của nhị-diện (M, SB, A).

Nhị-diện (M, SB, A) có hai mặt là SBA và SBM.

Ta đã biết KA nằm trong mặt thứ nhất và thẳng góc với cạnh SB của nhị-diện. Ta hãy xét xem KH có thẳng góc với cạnh SB không.

SB thẳng góc với AK và trực-giao với AH nên SB thẳng góc với KH, cạnh thứ ba của tam-giác AKH.

Ta kết-luận rằng $\widehat{AKH}$ là một góc phẳng của nhị-diện (M, SB, A).

3. Hình cầu qua năm điểm A, M, B, H, K.

Năm điểm nói trên không ở trên một mặt phẳng.

Theo giả-thiết, ta có $\widehat{AMB} = 90^o$, $\widehat{AKB} = 90^o$. Ngoài ra, ta biết thêm rằng $\widehat{AHB} = 90^o$.

Ba điểm K, H, M cùng nhìn đoạn AB dưới một góc vuông, vậy chúng ở trên hình cầu đường kính AB.

4. Vòng tương-giao của hai hình cầu đường kính AS, AB.

Ba điểm A, H, K ở trên hình cầu (Σ_1) đường kính AB.

Ngoài ra, H, K nhìn đoạn AS dưới một góc vuông, vậy HK ở trên hình cầu (Σ_2) đường kính AS.

Hai hình cầu (Σ_1), (Σ_2) có ba điểm chung A, H, K nên chúng có một vòng tròn chung. Đó là vòng qua ba điểm A, H, K. Vòng này có đường kính là AK và nằm trong mặt phẳng thẳng góc với SB tại K.

5. Hệ-thức giữa tg a và tg b.

Trong hai tam-giác vuông góc AHK và AMB, ta có:

$$\text{tg}\, b = \frac{AH}{HK} \qquad \text{tg}\, a = \frac{MB}{AM}$$

Suy ra $$\text{tg}\, a \,.\, \text{tg}\, b \,. = \frac{AH}{HK} \times \frac{MB}{AM}$$

Nhưng nhờ hai tam-giác vuông góc đồng-dạng SAH, SMA, ta có:

$$\frac{AH}{AM} = \frac{SH}{SA}$$

Và nhờ hai tam-giác vuông góc đồng-dạng SHK, SBM, ta có:

$$\frac{MB}{HK} = \frac{SB}{SH}$$

Như thế thì:

$$\text{tg}\, a \,.\, \text{tg}\, b = \frac{AH}{HK} \times \frac{MB}{AM} = \frac{AH}{AM} \times \frac{MB}{HK}$$
$$= \frac{SH}{SA} \times \frac{SB}{SH} = \frac{SB}{SA} = k$$

Cách tính a khi a = b.

Khi $a = b$ thì hệ-thức tg a . tg $b = k$ trở thành $\text{tg}^2 a = k$.

a là một góc nhọn, tg a phải dương, ta lấy tg $a = \sqrt{k}$. Bài toán có một nghiệm-số.

(Ta nhận-xét rằng $k = \dfrac{SB}{SA} > 1$. Vậy tg $a = \sqrt{k} > 1$ tức là $a > \dfrac{\pi}{4}$)

Cách tính a khi a = 2b.

Khi $a = 2b$ thì hệ-thức tg a . tg $b = k$ trở thành tg b . tg $2b = k$.

Thế mà $\quad \operatorname{tg} 2b = \dfrac{2 \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg}^2 b}$ nên ta có

$$\frac{2 \operatorname{tg}^2 b}{1 - \operatorname{tg}^2 b} = k$$

$$2 \operatorname{tg}^2 b = k - k \operatorname{tg}^2 b$$

$$(k + 2) \operatorname{tg}^2 b = k \qquad \text{(ta biết trước } k > 1\text{)}$$

$$\operatorname{tg}^2 b = \frac{k}{k + 2}$$

Do đó: $\quad \operatorname{tg}^2 b = \sqrt{\dfrac{k}{k + 2}}$

b là góc nhọn, a cũng là góc nhọn. Thế mà $b = \dfrac{a}{2}$, nên $b < \dfrac{\pi}{4}$ tức $\operatorname{tg} b < 1$.

Ta biết chắc-chắn rằng $\dfrac{k}{k + 2} < 1$

Vì thế trị-số $\quad \operatorname{tg} b = \sqrt{\dfrac{k}{k + 2}}$ thích-hợp với bài toán.

Biết b thì ta suy ra góc a, bởi vì $a = 2b$.

TOÁN

Cho một hình cầu tâm O, bán-kính R. Gọi AB là một đường kính. Trên OA, lấy một điểm H. OH = h < R. Đường thẳng góc với AB kẻ từ H cắt hình cầu ở C và D. Qua CD, có một mặt phẳng lưu-động Q_1. Mặt phẳng Q_1 và mặt phẳng ABCD làm thành một nhị-diện mà số đo là α ($0 < \alpha < 90°$).

1. Q_1 cắt hình cầu theo một vòng tròn (S_1). Tính bán-kính R_1 của (S_1) theo R, h và α. Gọi Q_2 là mặt phẳng chứa CD và thẳng góc với Q_1. Q_2 cắt hình cầu theo vòng tròn (S_2). Tính bán-kính R_2 của (S_2) theo R, h và α.

(Nên cắt hình cầu bằng mặt phẳng chứa AB và thẳng góc với mặt phẳng ABCD).

2. **Chứng-tỏ rằng tổng-số diện-tích của (S_1) và (S_2) là một hằng-số, khi h không đổi và α thay đổi. Tính α để cho tích-số hai diện-tích của (S_1) và (S_2) cực-đại.**

3. **h và α thay đổi, khi nào thì tích-số hai diện-tích của (S_1) và (S_2) lớn nhất ? Trị-số cực-đại đó là bao nhiêu ?**

BÀI GIẢI

1. Bán-kính của (S_1) và (S_2).

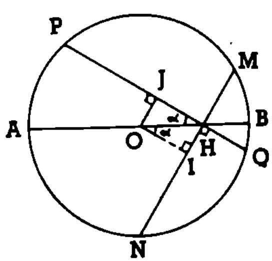
Khi ta cắt hình cầu và hai mặt phẳng Q_1, Q_2 bằng mặt phẳng chứa AB và thẳng góc với mặt ABCD thì vết của hình cầu, của Q_1 và Q_2 trên mặt đó là :

— Một vòng tròn lớn đường kính AOB = 2R *(h. 163)*.

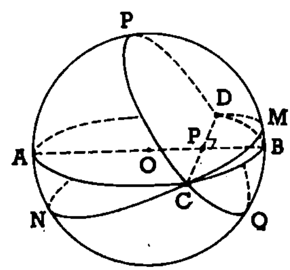
— Một đường thẳng PQ ; trên đó, đoạn PQ là đường kính của vòng (S_1).

— Một đường thẳng MN ; trên đó, đoạn MN là đường kính của vòng (S_2).

Đường CHD thẳng góc với mặt tờ giấy, vết của đường đó là điểm H.



Hình 163



Hình 164

Góc $\widehat{OHP}$ là góc phẳng của nhị-diện nhọn hợp bởi hai mặt ABCD và Q_1. Vậy $\widehat{OHP} = \alpha$.

Góc $\widehat{NHP}$ là góc phẳng của nhị-diện vuông góc $(Q_1 ; Q_2)$; vì thế, $\widehat{NHQ} = 90^0$ và $\widehat{OHN} = 90^0 - \alpha$.

Hạ OJ thẳng góc với PQ, và OI thẳng góc với MN.

Bán-kính của vòng (S_1) và (S_2) lần-lượt là JP và IN.

Hai tam-giác vuông góc OJH, OHI cho ta :

$$OJ = OH \sin \alpha = h \sin \alpha$$

$$OI = OH \cos \alpha = h \cos \alpha$$

Suy ra:

$$JP^2 = OP^2 - OJ^2 = R^2 - h^2 \sin^2 \alpha$$

$$IN^2 = OH^2 - OI^2 = R^2 - h^2 \cos^2 \alpha$$

Và

$$JP = \sqrt{R^2 - h^2 \cos^2 \alpha}$$

$$IN = \sqrt{R^2 - h^2 \cos^2 \alpha}$$

2. Tổng-số diện-tích của (S_1) và (S_2).

Diện-tích của (S_1) và (S_2) là :

$$\mathcal{S}_1 = \pi\ (R^2 - h^2 \sin^2 \alpha)$$

$$\mathcal{S}^2 = \pi\ (R^2 - h^2 \cos^2 \alpha)$$

Suy ra :

$$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \pi\ (2R^2 - h^2 \sin^2 \alpha - h^2 \cos^2 \alpha)$$

$$= \pi\ [2R^2 - h^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)]$$

$$= \alpha\ (2R^2 - h^2)$$

Tổng-số đó *không phụ-thuộc vào* α.

Tích-số hai diện-tích nói trên là $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$

Tổng-số $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ là hằng-số, nên tích-số cực-đại khi mà

$$\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_2$$

tức là

$$\pi\ (R^2 - h^2 \sin^2 \alpha) = \pi\ (R^2 - h^2 \cos \alpha)$$

$$R^2 - h^2 \sin^2 \alpha = R^2 - h^2 \cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha$$

α là góc nhọn, sin và cosin đều dương ; do đó, ta lấy căn được như sau :

$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

Suy ra : $\dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 1$ hay $\mathrm{tg}\ \alpha = 1$ và $\alpha = 45^o$.

3. **Tích-số diện-tích của (S_1) và (S_2).**

Ta đã có $\mathcal{S}_1 = \pi\,(R^2 - h^2 \sin^2 \alpha)$

$$\mathcal{S}_2 = \pi\,(R^2 - h^2 \cos^2 \alpha)$$

Do đó:

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2 &= \pi^2 \left[(R^2 - h^2 \sin^2 \alpha)(R^2 - h^2 \cos^2 \alpha)\right] \\ &= \pi^2 \left[R^4 + h^2 R^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + h^4 \sin^2\alpha \cos^2 \alpha\right] \\ &= \pi^2 \left[R^4 - h^2 R^2 + h^4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha\right] \\ &= \pi^2 \left[R^4 - h^2 (R^2 - h^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)\right]\end{aligned}$$

Ta biết rằng $h < R$, $\sin \alpha < 1$, $\cos \alpha < 1$ nên:

$$R^2 - h^2 \sin^2 \alpha \cos \alpha > 0$$

Do đó $\quad h^2 (R^2 - h^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha) > 0$

Muốn cho $\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2$ cực-đại, ta phải thu xếp cho:

$$R^4 - h^2 \underbrace{(R^2 - h^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}_{> 0} \text{ cực-đại}$$

Muốn thế, ta lấy $h = 0$

Lúc đó $\quad \mathcal{S}_1 \cdot \mathcal{S}_2 = \pi^2 R^4.$

Hai mặt phẳng Q_1 và Q_2 đều qua O; (S_1) và (S_2) lúc nào cũng là hai *vòng lớn* bất-chất α là bao nhiêu.

MỤC-LỤC

In tại cơ-sở ấn-loát ĐƯỜNG-SÁNG
Thực-hiện bằng máy offset tự-động
Đức-quốc «HEIDELBERG»
Giấy phép số 4397 / BTLC/BC3 / XB